

Строгие и аппроксимирующие выражения для индуктивностей соленоидов круговой и квадратной формы

ЦИЦИКЯН Г.Н., АНТИПОВ М.Ю.

Представлено систематизированное изложение замкнутых выражений для индуктивностей соленоидов круговой и квадратной формы. Приведены видоизменённые выражения через сферические функции Лежандра с полуцелым индексом. Строгие оценки сжимающих сил для соленоидов круговой и квадратной формой получены как через производные по обобщённым координатам, так и через аппроксимирующие известные выражения. Проведены сопоставления новых выражений с известными ранее. В приложении дан вывод выражения для коэффициента самоиндукции короткого соленоида круговой формы на основе сферических функций Лежандра с полуцелыми индексами. Проведено его сравнение с известными формулами Уилера и Лундина.

К л ю ч е в ы е с л о в а: индуктивность соленоидов, видоизмененные выражения, функции Лагранжа, сжимающие силы, коэффициент самоиндукции, сравнение с известными формулами

В работах [1, 2] приведены некоторые рекомендации по определению коэффициентов самоиндукции тонкослойных катушек (соленоидов) с круговой и квадратной формой основания. В [2] были даны выражения для оценки сжимающих сил на соленоид круговой формы при протекании тока. Однако обсуждение вышеупомянутых вопросов строилось в основном на основе аппроксимирующих выражений с той или иной степенью точности. Строгим оценкам не было уделено достаточно внимания. Вместе с тем строгие оценки даются в нескольких видоизменениях для соленоидов как круговой, так и квадратной формы. Анализ этих видоизменений авторами настоящей статьи будет уделено большое внимание. Последующее изложение отведено расчёту сжимающих сил на основании как строгих, так и аппроксимирующих выражений.

Строгое выражение для индуктивностей соленоидов круговой формы можно записать в виде [3] (рис. 1):

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d \left(\frac{d}{l}\right)^2}{3} \left[\frac{2k^2 - 1}{k^3} E(k) + \frac{1 - k^2}{k^3} K(k) - 1 \right], \quad (1)$$

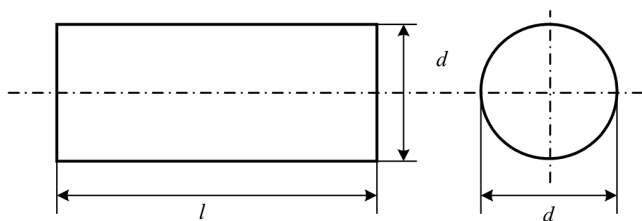


Рис. 1. Соленоид с круглым основанием

где

$$k^2 = \frac{d^2}{d^2 + l^2} = \frac{2}{g+1}; \quad g = 2 \left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{g-1} = \left(\frac{d}{l}\right)^2; \quad (2)$$

$K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, которые можно выразить через сферические функции Лежандра [4] с помощью связей:

$$Q_{-1/2}(g) = kK(k) = \sqrt{\frac{2}{g+1}} K\left(\sqrt{\frac{2}{g+1}}\right);$$

$$Q_{1/2}(g) = gkK(k) - \frac{2}{k} E(k) = g \sqrt{\frac{2}{g+1}} K\left(\sqrt{\frac{2}{g+1}}\right) - [2(g+1)]^{1/2} E\left(\sqrt{\frac{2}{g+1}}\right).$$

Тогда $\frac{2}{k} E(k) = gQ_{-1/2}(g) - Q_{1/2}(g)$, и подстановкой записанных выражений в (1) с учётом (2) найдём:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d \left(\frac{2}{g-1}\right)}{3} \left[-1 + \frac{3g-1}{4} Q_{-1/2}(g) - \frac{3-g}{4} Q_{1/2}(g) \right]. \quad (3)$$

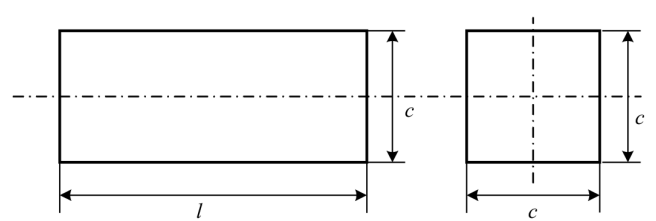


Рис. 2. Соленоид с квадратным основанием

Используя соотношения

$$2(g^2 - 1)^{1/2} Q'_{1/2}(g) = gQ_{1/2}(g) - Q_{-1/2}(g)$$

и выражая $Q_{-1/2}(g)$ через $Q'_{1/2}(g)$ и $Q_{1/2}(g)$, получаем:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{3} \left(\frac{2}{g-1} \right) \times \left[-1 + \frac{3(g^2 - 1)}{4} Q_{1/2}(g) - \frac{3g-1}{2} (g^2 - 1)^{1/2} Q'_{1/2}(g) \right]. \quad (4)$$

Таким образом, имеем два точных выражения для индуктивности соленоида с круговым основанием (1) и (4), внешне весьма различных. Первое из них может быть представлено в следующем видеизменении, записанном в справочной книге [5]:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{3} \left[(\alpha^2 + 1)^{1/2} \left(K(k) + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} E(k) \right) - \alpha^2 \right], \quad (5)$$

где

$$\alpha^2 = \left(\frac{l}{d} \right)^2; \quad k = \frac{1}{(\alpha^2 + 1)^{1/2}}; \quad \alpha^2 = \frac{1 - k^2}{k^2}. \quad (6)$$

Отметим, что аппроксимирующее выражение для индуктивности короткого соленоида круговой формы было дано в [6]. В **приложении** дан краткий вывод альтернативного выражения с сопоставлением некоторых численных значений. Рассмотрим строгие выражения, описывающие коэффициенты самоиндукции соленоидов с квадратным основанием (рис. 2).

Приведём две модификации выражения для коэффициента самоиндукции соленоида с квадратным основанием, первое из которых в принятых здесь обозначениях может быть записано в виде [5]:

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 w^2 c \left\{ \operatorname{arsh} \frac{c}{l} - \left(1 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \ln \frac{\frac{c}{l} + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2}} - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] + \frac{l}{3c} - \frac{1}{3} \left(2 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \times \left[\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2}}{\frac{c}{l}} + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \frac{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2}}{\frac{c}{l}} + 2 \frac{c}{l} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2}} \right] \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \mu_0 w^2 c \left\{ \ln \left[\frac{c}{l} + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right] - \left(1 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \times \left[\frac{c}{l} + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right] - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] + \frac{1}{3c} \times \left[1 - \left(2 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2} + \left(1 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right] + 2 \frac{c}{l} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2}} \right\}. \quad (7)$$

Второе выражение для коэффициента самоиндукции соленоида с квадратным основанием приведено в [6] и с учётом используемых обозначений представлено в виде:

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 w^2 c \left\{ \operatorname{arsh} \frac{c}{l} - \left(1 - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \right) \operatorname{arsh} \frac{\frac{c}{l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2}} - \left(\frac{c}{l} \right)^2 \times \left[\ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{c}{l} \frac{1 - \frac{c}{l}}{3 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right) \left(\frac{c}{l} + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right)} - \frac{c}{l} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2} - \sqrt{2}}{3 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l} \right)^2} + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right) \left(\sqrt{2} \frac{c}{l} + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2} \right)} + \frac{c}{l} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2}}{\left(\frac{c}{l} \right)^2} \right] \right\}. \quad (8)$$

Так как

$$2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{c}{l} \right)^2}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{l}{c} \right)^2}}{\left(\frac{c}{l} \right)^2},$$

то в процессе образований можно убедиться, что формула (8) является видоизменением формулы (7). В пользу равенства для arctg говорит, например, операция взятия тангенса от обеих частей равенства с использованием формулы для тангенса двойного угла [7]:

$$\operatorname{tg} 2A = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}, \text{ т.е. } \frac{2 \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{c}{l}\right)^2}}}{1 - \frac{1}{1+2\left(\frac{c}{l}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1+2\left(\frac{c}{l}\right)^2}}{\left(\frac{c}{l}\right)^2}.$$

Для последующей идентификации можно числители и знаменатели записанных дробей в (8) умножить соответственно на

$$\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{l}\right)^2} \right] \left[\frac{c}{l} - \sqrt{1 + \left(\frac{c}{l}\right)^2} \right]$$

$$\text{и } \left[\sqrt{1 + \left(\frac{c}{l}\right)^2} - \sqrt{1 + 2\left(\frac{c}{l}\right)^2} \right] \left[\sqrt{2} \frac{c}{l} - \sqrt{1 + 2\left(\frac{c}{l}\right)^2} \right]$$

с дальнейшим приведением к окончательному виду, по которому и устанавливается идентичность формул (8) и (7).

Сравним теперь коэффициенты самоиндукции соленоидов с круговым и квадратным основанием при равновеликости периметров, т.е. когда $\pi d = 4c$, и при условии одинаковой длины соленоидов l и равного числа витков w , используя (5) и (7).

Подставив $d = \frac{4c}{\pi}$ в выражение для α и получив

$$\alpha^2 = \left(\frac{\pi l}{4c}\right)^2, \text{ запишем}$$

$$k = \frac{1}{\left[\left(\frac{\pi l}{4c}\right)^2 + 1\right]^{1/2}} = \frac{2c}{[(\pi l)^2 + (4c)^2]^{1/2}}$$

и соответственно $k^2 = \frac{4c^2}{(\pi l)^2 + (4c)^2}$, используя формулы (6).

В результате для индуктивности (5) имеем:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 4c}{3\pi} \left\{ \left[\left(\frac{\pi l}{4c}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \left[K(k) + \left(\frac{4c}{\pi l}\right)^2 \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left[1 - \left(\frac{\pi l}{4c}\right)^2 \right] E(k) \right] - \left(\frac{4c}{\pi l}\right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 w^2 4c}{3\pi} \left\{ \left[\left(\frac{\pi l}{4c}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[K(k) + \left(\frac{4c}{\pi l}\right)^2 - 1 \right] E(k) \right] - \left(\frac{4c}{\pi l}\right)^2 \right\}. \quad (9)$$

Множитель перед фигурной скобкой в (7) запишем как $\frac{\mu_0 w^2 4c}{3\pi} \frac{3}{2}$ с последующим сравнением произведения $\frac{3}{2}$ на выражение в фигурной скобке в (7) с формулой (9). В простейшем случае, когда $l = c$, в соответствии с (7) $3 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 1,5708 = \pi/2$.

Замечая далее, что $k^2|_{c=l} = \frac{16}{\pi^2 + 16} = 0,618$, полу-

чаем для K и E следующие значения [4, 5]: $K \approx 1,967$ и $E = 1,285$, тогда по формуле (9)

$$\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \left[1,967 + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 \right] 1,285 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1,895.$$

Из сопоставления $\left(1,895 > \frac{\pi}{2}\right)$ вытекает, что для

соленоидов одинаковой длины и при равенстве периметров оснований круговой и квадратной формы значение индуктивности больше у соленоида с круговым основанием. Этому заключению соответствует и то обстоятельство, что для соленоида весьма малой длины, практически близкого к плоской фигуре, его индуктивность увеличивается при одинаковом периметре фигуры с увеличением числа её сторон [8]. Вместе с тем данное в (8) выражение для индуктивности соленоида с прямоугольным основанием, в том числе и в частном случае квадратного основания, не сводится к формулам (7) и (8). На этот счёт соответствующие замечания имеются в [6].

Переходя к определению сжимающих сил на соленоиды с помощью выражения $f_{сж} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial l}$, где i — ток соленоида, воспользуемся выводом из [9] для соленоидов с круговой формой основания. Строгий результат получен в [9]:

$$f_{сж} = -\frac{\mu_0 i^2 w^2}{6} \times$$

$$\times \left\{ -2\alpha^{-3} + \frac{(\alpha^2 + 1)^{1/2}}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) E(k) - K(k) \right] \right\}, \quad (10)$$

значения α^2 — по формулам (6).

Выражение в фигурной скобке в (10) с учётом множителя $\frac{1}{6}$ может быть видоизменено и записано

в виде:

$$\frac{1}{6} \frac{1}{(1-k^2)^{3/2}} \{(1+k^2)E - (1-k^2)K - 2(k^2)^{3/2}\}. \quad (11)$$

Используя связи сферических функций Лежандра с полуцелым индексом с полными эллиптическими интегралами в виде [4, 10]:

$$Q_{1/2}(g) = g \left(\frac{2}{g+1} \right)^{1/2} K - \sqrt{2}(g+1)^{1/2} E; \quad (12)$$

$$Q'_{1/2}(g) = \left(\frac{g-1}{2} \right)^{1/2} K - \frac{g}{2} \left(\frac{2}{g-1} \right)^{1/2} E, \quad (13)$$

где $g = \frac{2-k^2}{k^2}$, выразим E и K через $Q_{1/2}(g)$ и $Q'_{1/2}(g)$:

$$E = (g-1) \left(\frac{g+1}{2} \right)^{1/2} Q_{1/2}(g) - g[2(g-1)]^{1/2} Q'_{1/2}(g); \quad (14)$$

$$K = g \left(\frac{g+1}{2} \right)^{1/2} Q_{1/2}(g) - 2^{1/2}(g+1)(g-1)^{1/2} Q'_{1/2}(g). \quad (15)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2}{g+1}$, преобразуем (11):

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{(g+3)(g+1)^{1/2}}{(g-1)^{3/2}} E - \frac{(g+1)^{1/2}}{(g-1)^{1/2}} K - 2 \left(\frac{2}{g-1} \right)^{3/2} \right\}. \quad (16)$$

Подставив (14) и (15) для E и K , окончательно запишем:

$$\frac{1}{6} \left\{ \frac{3(g+1)}{2^{1/2}(g-1)^{1/2}} Q_{1/2}(g) - \frac{2^{1/2}(g+1)^{1/2}(3g+1)}{g-1} Q'_{1/2}(g) - 2 \left(\frac{2}{g-1} \right)^{3/2} \right\}. \quad (17)$$

Таким образом имеем два выражения (11) и (17), внешне существенно различных, но определяющих одну и ту же сжимающую силу на соленоид при протекании тока i с учётом множителя $(-\mu_0 i^2 w^2)$. Для примера возьмём случай, когда

$l=d$, тогда $\frac{1-k^2}{k^2} = 1$, следовательно, $k^2 = 0,5$ и

$g = \frac{2-0,5}{0,5} = 3,0$. Расчёт по (11) со значениями $K(0,5)$ и $E(0,5)$, равными соответственно 1,8541 и 1,3506 [5], приводит к результату:

$$\frac{1}{6} \frac{1}{0,5^{3/2}} \{1,5 \cdot 1,3506 - 0,5 \cdot 1,8541 - 2(0,5)^{3/2}\} = 0,1847.$$

С другой стороны, подстановка значения $g=3$ в (17) даёт:

$$\frac{1}{6} [6 \cdot 0,1129 - 2^{1/2} \cdot 10 \cdot (-0,1719) - 2] = 0,1847,$$

т.е. имеем полное совпадение до четвёртой значащей цифры после запятой.

Приближённая формула записана в [2] в виде

$$f_{сж} = -\frac{\mu_0 i^2 w^2}{8} \pi(\alpha+0,44)^{-2} = -\mu_0 i^2 w^2 \left[\frac{\pi}{8} (\alpha+0,44)^{-2} \right], \quad (18)$$

и при $\alpha = \frac{l}{d} = 1$ получаем в квадратных скобках значение 0,1894.

Перейдём к определению сжимающих сил на соленоид с квадратным основанием, используя аппроксимирующее выражение для индуктивности, приведенное в [6] и повторенное в [1]:

$$L = \frac{2}{\pi} \mu_0 w^2 c \left[\ln \left(1 + \pi \frac{c}{2l} \right) + \frac{1}{3,64 + 4 \frac{l}{c} + 0,51 \left(\frac{2l}{c} \right)^2} \right], \quad (19)$$

тогда

$$f_{сж} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial l} = \mu_0 w^2 i^2 \pi^{-1} c \times$$

$$\times \left[\frac{\pi \frac{c}{2} (-l)^{-2}}{1 + \pi \frac{c}{2l}} + (-1) \frac{\frac{4}{c} + 0,51 \frac{4}{c^2} 2l}{\left[3,64 + 4 \frac{l}{c} + 0,51 \left(\frac{2l}{c} \right)^2 \right]^2} \right] = -\mu_0 w^2 i^2 \left[\frac{\left(\frac{c}{l} \right)^2}{2 + \pi \frac{c}{l}} + 4 \frac{1 + 1,02 \frac{l}{c}}{\pi \left[3,64 + 4 \frac{l}{c} + 0,51 \left(\frac{2l}{c} \right)^2 \right]^2} \right]. \quad (20)$$

При $l=c$ фигурные скобки равны $0,1945 + 0,0274 = 0,2219$.

Предположим теперь, что при $l=c$ периметры оснований кругового соленоида и квадратного совпадают, т.е. в (18), где $\alpha = 1/d$, для диаметра d имеем $4c/\pi$, тогда для кругового соленоида

$$f_{сж} = -\frac{\mu_0 i^2 w^2 \pi}{8} \left(\frac{\pi}{8} + 0,44 \right)^{-2} = -\mu_0 i^2 w^2 0,2615,$$

т.е. оценка оказывается большей в сравнении с 0,2219.

Наконец, дадим строгое выражение для сжимающих сил на соленоид с квадратным основанием без промежуточных выкладок. Выражение для $f_{сж}$ на основе строгой формулы (7) может быть записано в виде:

$$f_{сж} = -\mu_0 w^2 i^2 \pi^{-1} \times \left[2 \left(1 + \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2} + 2 \frac{c^3}{l^3} \ln \frac{\frac{c}{l} + \left(1 + 2 \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2}} - \left(1 + 2 \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2} - 1,4866 \left(\frac{c}{l} \right)^3 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left[\left(2 - \frac{c^2}{l^2} \right) \left(1 + \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{c^2}{l^2} \right) \times \left(1 + 2 \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2} \right] + 2 \frac{c^2}{l^2} \arctg \frac{1}{\left(1 + 2 \frac{c^2}{l^2} \right)^{1/2}} \right]. \quad (21)$$

Приведём численный результат по (21) без учёта размерного множителя $-\mu_0 w^2 i^2$ при $l=c$. Он равен 0,2221 и практически не отличается от значения 0,2219, определенного по (20). Для другого примера, где принято $c=\sqrt{2}l$, получаем по (20) значение 0,3495, а по (21) — 0,3497, при $l \rightarrow \infty$ выражение (21) обращается в нуль, что объясняется стремлением к нулю радиальной составляющей магнитного поля соленоида. При $c=\sqrt{3}$ имеем соответственно 0,4492 и 0,4493; при $c=l/\sqrt{2}$ по (21) получаем 0,1359 против значения 0,1358, полученного по (20), а при $c=l/\sqrt{3}$ имеем одинаковый результат 0,1001.

Приложение. Внесём множитель $\left(\frac{2}{g-1} \right)$ в выражение в квадратных скобках формулы (4). Полагая $g=1+\Delta g$, запишем выражения для $Q_{1/2}(1+\Delta g)$ и $Q'_{1/2}(1+\Delta g)$ при $\Delta g \leq 0,5$ с учетом формул [10]:

$$Q_{1/2}(1+\Delta g) = \frac{1 + \frac{3}{8}\Delta g}{2} \left[\ln \left(\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} \right) - 1,2274 \right] + \frac{3}{8}\Delta g; \quad (П-1)$$

$$Q'_{1/2}(1+\Delta g) = \frac{3}{16} (2\Delta g)^{1/2} \times$$

$$\times \left[\ln \left(\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} \right) + 0,1059 \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} \right)^{1/2} + \frac{3}{8} \left(\frac{\Delta g}{2 + \Delta g} \right)^{1/2}. \quad (П-2)$$

Подставляя (П-1) и (П-2) в (4), получим:

$$L = \mu_0 \frac{w^2 d}{3} \{ 1,4089 - 0,11096\Delta g + 0,21729(\Delta g)^2 - (0,0562 + 0,0842\Delta g)(2 + \Delta g)^{1/2} + [1,5 + 1,3125\Delta g + 0,28125(\Delta g)^2 - (0,53023 + 0,79548\Delta g) \times (2 + \Delta g)^{1/2}] \ln \left(\frac{2 + \Delta g}{\Delta g} \right) \}. \quad (П-3)$$

Подставляя в (П-3) с учетом (2) $\Delta g = g-1 = 2 \left(\frac{l}{d} \right)^2$, найдём для индуктивности короткого соленоида $\left(\frac{l}{d} \leq 0,5 \right)$ расчётное выражение:

$$L = \mu_0 \frac{w^2 d}{3} \left\{ 1,4089 - 0,2219 \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 0,8692 \left(\frac{l}{d} \right)^4 - \left[0,0794 + 0,2383 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right]^{1/2} + \left[1,5 + 2,625 \left(\frac{l}{d} \right)^2 + 1,125 \left(\frac{l}{d} \right)^4 - \left(0,75 + 2,25 \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{l}{d} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \times \ln \left[1 + \left(\frac{d}{l} \right)^2 \right] \right\}. \quad (П-4)$$

Для сравнения запишем известную формулу Уилера [6] для индуктивности короткого соленоида круговой формы с учётом замечаний в [2]:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{3} \left[\frac{3}{2} \left(\ln \frac{4d}{l} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{\mu_0 w^2 d}{3} \left[\frac{3}{2} \left(\ln \frac{\pi d}{l} - 0,2584 \right) \right]. \quad (П-5)$$

Кроме того, запишем аппроксимирующую формулу Лундина [11] для короткого соленоида круговой формы:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 d}{3} \left\{ \frac{3}{2} \left[\left(\ln \left(\frac{4d}{l} \right) - \frac{1}{2} \right) f_1 \left(\frac{l^2}{d^2} \right) + f_2 \left(\frac{l^2}{d^2} \right) \right] \right\}, \quad (П-6)$$

где

$$f_1(x) = \frac{1 + 0,3839x + 0,01711x^2}{0,25895}; \quad (П-7)$$

$$f_2(x) = 0,09384x + 9,00203x^2 - 0,0008x^3; \quad x = \left(\frac{l}{d}\right)^2. \quad (\text{П-8})$$

Сравним численные значения по (П-4), (П-5) и (П-6) и сведём их в таблицу для трёх значений $g=1,5; 1,3; 1,1$ и соответственно для $l/d=0,5; 0,38; 0,2236$.

Значение g	Значение L по формуле		
	(П-4)	(П-5)	(П-6)
1,5	2,4742	2,3692	2,4766
1,3	2,8052	2,7523	2,8117
1,1	3,5872	3,5763	3,6032

Значение по (П-4) располагается между значениями, полученными по формулам (П-5) и (П-6), и его можно рекомендовать для практического использования.

Заключение. Приведена строгая формула для индуктивности соленоида с круговым основанием в двух видоизменениях, одно из которых выражено только через сферические функции Лежандра второго рода. Получены выражения для индуктивности соленоида с квадратным основанием, установлена идентичность формул из [5, 6]. Выражения для сжимающих сил на соленоид с круговым основанием представлены в двух видоизменениях. Для соленоида с квадратным основанием использованы как строгое, так и аппроксимирующее выражения индуктивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Индуктивность тонкослойных катушек круговой и квадратной формы. — Изв. РАН. Энергетика, 2017, № 6, с. 119–124.

2. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Оценка сжимающих сил, действующих на тонкослойные катушки (соленоиды) с током. — Изв. РАН. Энергетика, 2018, № 5, с. 26–31.

3. Knight W. David. Solenoid inductance calculation. Devon, England, 2016 [Электрон. ресурс] website <http://g3ynh.info/zdocs/magnetics/> (дата обращения 30.09.2019).

4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и Н. Стиган. М.: Наука, 1979, 832 с.

5. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986, 488 с.

6. Wheeler H.A. Inductance formulas for circular and square coils. — Proc. of the IEEE letters, 1982, vol.70, No.12, pp. 1449–1451.

7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. СПб.: Лань, 2005, 232 с.

8. Grover F.W. Inductance calculations. Working formulas and tables. D.Van Nostrand Co. inc., New York, 1947, p. 98.

9. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Расчёт индуктивности однослойных и двухслойных контуров с учётом практического применения. — Электричество, 2019, № 10, с. 48–52.

10. Цицикян Г.Н. Электродинамические силы в токоведущих частях электротехнических комплексов. СПб.: ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 2016, 94 с.

11. Richard Lundin. A handbook formula for the inductance of a single-layer circular coil. — Proceedings of the IEEE (letters) 1985, vol.73, No. 9, pp. 1428–1429.

[20.11.2019]

А в т о р ы: Цицикян Георгий Николаевич — доктор техн. наук, зам. начальника отдела, ученый секретарь НТС филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр», диссертацию защитил в 1990 г.

Антипов Михаил Юрьевич — инженер 1-й категории филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр».

Electrichestvo, 2020, No. 2, pp. 35–41

DOI:10.24160/0013-5380-2020-2-35-41

Rigorous and Approximating Expressions for the Inductances of Circular and Square Solenoids

TSITSIKYAN Georgy N. (Krylov State Research Centre, SET Branch, St. Petersburg, Russia) — Deputy Head of Dept., Academic secretary of Scientific and Technical Council, Dr. Sci. (Eng.)

ANTIPOV Mikhail Yu. (Krylov State Research Centre, SET Branch, St. Petersburg, Russia) — Ind Category Design Engineer

Closed expressions for the inductances of circular and square solenoids are presented in a systematic manner. Transformed expressions written in terms of spherical Legendre functions with a semi-integer index are given. Both rigorous estimates of compression forces for circular and square solenoids written through derivatives with respect to generalized coordinates and using well-known approximating expressions are obtained. The new expressions are compared with the previously known ones. An appendix to the article contains derivation of the expression for the self-induction coefficient of a short circular solenoid based on the spherical Legendre functions with semi-integer indexes. The derived expression is compared with the well-known Wheeler's and Lundin's formulas.

Key words: solenoid inductance, transformed expressions, Legendre functions, compression forces, self-induction coefficient, comparison with well-known formulas

REFERENCES

1. **Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.** *Izv. RAN. Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Energetics)*, 2017, No. 6, pp. 119–124.
2. **Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.** *Izv. RAN. Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Energetics)*, 2018, No. 5, pp. 26–31.
3. **Knight W. David.** Solenoid inductance calculation. Devon, England, 2016 [Electron. Resource] website <http://g3ynh.info/zdocs/magnetics/> (Data of apple 30.09.2019).
4. **Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami/Pod. red. M. Abramovitsa i N. Stigana** (Handbook of special functions with formulas, graph and mathematical tables/ Edit. by M. Abramovits, I. Stigan). Moscow, Nauka, 1979.
5. **Kalantarov P.L., Tseitlin L.A.** *Raschet induktivnostei. Spravochnaya kniga* (Calculation of inductances: Handbook). Leningrad, Energoatomizdat, 1986, 488 p.
6. **Wheeler H.A.** Inductance formulas for circular and square coils. — Proc. of the IEEE letters, 1982, vol.70, No.12, pp.1449–1451.
7. **Dvait G.B.** *Tablitsy integralov i drugiye matematicheskiye formuly* (Tables of integrals and other mathematical formulas). St. Petersburg, Lan', 2005, 232 p.
8. **Grover F.W.** Inductance calculations. Working formulas and tables. D.Van Nostrand Co. inc., New York, 1947, p. 98.
9. **Tsitsikyan G.N., Antipov N.Yu.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2019, No. 10, pp. 48–52.
10. **Tsitsikyan G.N.** *Elektrodinamicheskiye sily v tokovedushchikh chastyakh elektrotekhnicheskikh kompleksov* (Electrodynamic forces in live parts of electrical complexes). St. Petersburg, Publ. «Krylov State Scientific Centre», 2016, 94 p.
11. **Richard Lundin.** A handbook formula for the inductance of a single-layer circular coil. Proceedings of the IEEE (letters) 1985, 'vol.73, No. 9, pp. 1428–1429.

[20.11.2019]