

Применение сингулярных финитных функций для аппроксимации поверхностной плотности заряда в методе граничных интегральных уравнений

КАЛИМОВ А.Г., ВАЖНОВ С.А.

Рассматривается применение сингулярных функций для построения функций формы конечных элементов применительно к задачам расчета характеристик электрического поля методом вторичных источников. Идея рассматриваемого подхода основана на использовании аналитических решений уравнения Лапласа в окрестности особых точек заряженных электродов. В сравнении с традиционными технологиями аппроксимации распределения плотности зарядов на поверхностях электродов рассматриваемый подход позволяет получить высокую точность расчета напряженности электрического поля в непосредственной близости от заряженного объекта, включая его углы и грани. Эффективность и высокая точность получаемых при рассматриваемой аппроксимации результатов расчета подтверждается сравнением результатов численного моделирования электрических полей в модельных задачах с известными аналитическими решениями. Рассматриваемый подход к аппроксимации функций формы в перспективе может применяться к расчету как двумерных, так и трехмерных электрических полей.

К л ю ч е в ы е с л о в а: электростатическое поле, интегральные уравнения, метод граничных элементов, метод конечных элементов, сингулярность

Для расчета напряженности электрического поля, создаваемого системой заряженных электродов, широко применяются методы граничных интегральных уравнений (МГЭ) [1–4]. Подобные формулировки имеют целый ряд достоинств. Одним из них является относительная простота дискретизации расчетной области, поскольку создающие электрическое поле заряды распределены по поверхности электродов. Еще одна важная особенность получаемых решений в том, что они в точности удовлетворяют уравнениям Максвелла. Указанное обстоятельство особенно важно в задачах оптики заряженных частиц при разработке масс-спектрометров с высоким разрешением [5–9]. В то же время практическое применение методов интегральных уравнений сопряжено с необходимостью решения проблемы сингулярности ядра интегрального уравнения, в особенности вблизи от углов проводящих электродов. Использование приближенных численных методов расчета сингулярных интегралов в рассматриваемой постановке существенно снижает точность расчета характеристик электрического поля.

Основная цель настоящей работы — исследование новой технологии аппроксимации распределения источников электрического поля, основанной на использовании сингулярных конечных элементов.

Оценка точности МГЭ для расчета поля заряженного электрода. Для расчета характеристик электрического поля, создаваемого системой заряженных электродов, в общем случае используется решение

интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds. \quad (1)$$

Неизвестной функцией здесь является распределение плотности заряда σ по поверхности электродов S , потенциалы U на этих поверхностях считаются заданными. Это же соотношение используется для расчета пространственного распределения электрического потенциала по зарядам, определенным в результате решения уравнения (1). Для плоскопараллельного электрического поля аналогичное уравнение имеет вид:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon L} \int_L \tau(\vec{r}') \ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) dl. \quad (2)$$

Для численного решения этого уравнения обычно применяется процедура разбиения поверхности электрода на отдельные элементы с последующей аппроксимацией плотности заряда константами в пределах каждого из них. Очевидная погрешность реализации такой формулировки связана с тем, что рассчитываемая функция разрывается на границе элементов, что, во-первых, снижает точность решения исходного интегрального уравнения и, во-вторых, увеличивает погрешность расчета напряженности электрического поля вблизи электродов. Отдельно необходимо отметить существенное снижение точности моделирования

электрического потенциала в окрестности углов электродов, где линейная плотность заряда стремится к бесконечности, что невозможно воспроизвести с помощью кусочно-постоянных функций.

Предлагаемые в ряде публикаций методы учета сингулярности в распределении поверхностной плотности заряда на краях электрода [10–12] позволяют повысить точность расчета электрического поля. Однако предлагаемый в них способ аппроксимации приводит к разрывам плотности зарядов на границах элементов и уже на постановочной стадии ограничивает возможную точность получаемых распределений плотности заряда и напряженности электрического поля.

В настоящей работе предлагается проводить аппроксимацию плотности заряда на базе конечно-элементной технологии с применением специальных сингулярных базисных функций, что позволяет моделировать распределения поверхностной плотности зарядов непрерывными зависимостями с характерными свойствами на краях или острых двугранных углах проводящих электродов. В статье анализируются свойства метода граничных уравнений применительно к системе бесконечно длинных заряженных электродов при использовании различных способов аппроксимации линейной плотности заряда на их поверхности.

Для того чтобы оценить точность реализации различных формулировок МГЭ, рассмотрим распределение плотности заряда на поверхности тонкого бесконечно длинного заряженного электрода шириной $2a$ (рис. 1).

Аналитическое решение этой задачи может быть найдено методом конформных преобразований и приводится, например, в [13]. Комплексный потенциал $W(z)$ на плоскости переменной $z = x + iy$ и его производная равны:

$$W = -\frac{i\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}; \quad \frac{dW}{dz} = -\frac{i\tau}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 - a^2}},$$

где τ – линейная плотность электрического заряда; a – полуширина электрода.

Для контроля точности численного решения задачи использовалось известное из аналитического решения отношение полного линейного заряда электрода τ к плотности заряда σ в его центральной части: $\tau/\sigma = \pi a$.

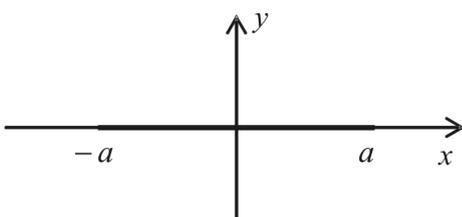


Рис. 1. Бесконечно длинный заряженный электрод

Численные расчеты были проведены при различном разбиении электродов на простейшие элементы и при трех различных способах аппроксимации неизвестной функции. Один из них предполагал постоянство плотности заряда внутри каждого элемента, второй обеспечивал непрерывность распределения и его линейное изменение внутри каждого элемента, третий – квадратичную аппроксимацию плотности заряда внутри элементов. Результаты сравнения точности численного решения задачи приведены на рис. 2. Как видно, переход к аппроксимирующим функциям 2-го порядка дает значительный (на 2 порядка) выигрыш в точности расчета поверхностных зарядов при одинаковом числе переменных.

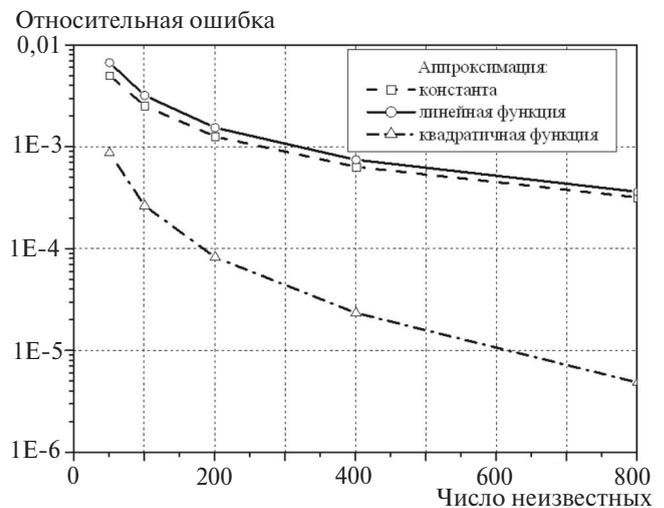


Рис. 2. Погрешность вычисления плотности заряда в центре электрода при различной дискретизации расчетной области

Применение сингулярных конечных функций для аппроксимации поверхностного заряда. Основным источником ошибок при расчете напряженности электрического поля с использованием методов граничных элементов является погрешность аппроксимации плотности электрического заряда вблизи границ или углов электродов, где значение этой плотности стремится к бесконечности. В связи с этим представляется перспективным использование сингулярных функций для аппроксимации плотности заряда вблизи особых точек. Выбор таких функций определяется формой электрода. Для бесконечно тонкой эквипотенциальной пластины поверхностная плотность заряда зависит от координаты по закону

$$\sigma(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (3)$$

где x – расстояние до края электрода. Для того чтобы обеспечить подобную зависимость, достаточно выбрать финитную функцию для крайнего элемента таким образом, чтобы она обращалась в

нуль во всех узлах, кроме особого, в котором она должна стремиться к бесконечности в соответствии с выражением (3). При использовании аппроксимирующих функций 1-го порядка такими свойствами, как легко убедиться, обладает функция

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - x \frac{1}{a\sqrt{a}},$$

где a – длина элемента, а начало системы координат располагается в особом узле (рис. 3).

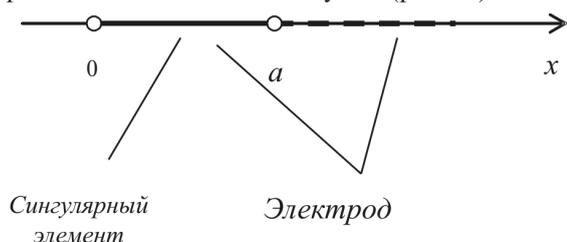


Рис. 3. Сингулярный элемент 1-го порядка

Финитная функция φ_0 , ассоциированная со вторым узлом сингулярного элемента, расположенным в точке $x=a$, определяется по обычным принципам формирования финитных функций и равна:

$$\varphi_a = x \frac{1}{a}.$$

При использовании аппроксимации 2-го порядка основные принципы конструирования финитных функций сохраняются прежними. Однако в центре элемента появляется дополнительный узел с координатой b .

Сингулярная финитная функция для этого элемента имеет вид:

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + c_1 x + c_2 x^2,$$

где коэффициенты

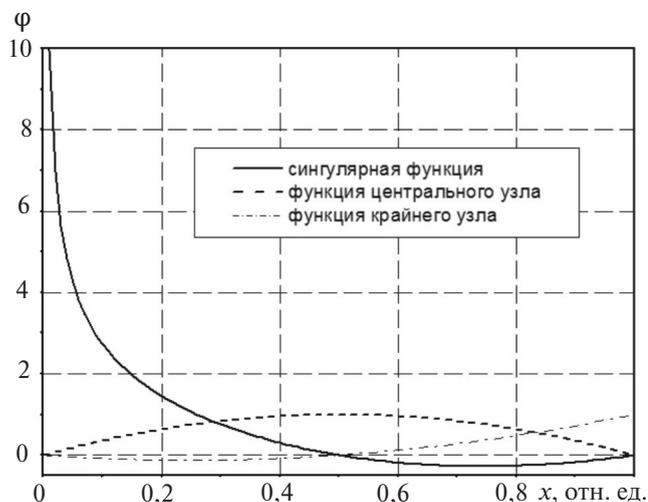


Рис. 4. Финитные функции 2-го порядка для сингулярного элемента

$$c_1 = -\frac{a^2 \sqrt{a-b^2} \sqrt{b}}{ab\sqrt{ab}(a-b)}; \quad c_2 = -\frac{a\sqrt{a-b}\sqrt{b}}{ab\sqrt{ab}(a-b)}.$$

Две другие функции, ассоциированные с узлами a и b , могут быть построены в соответствии со стандартными правилами формирования финитных функций 2-го порядка [1].

Расчет потенциала электрического поля, создаваемого сингулярным элементом. Потенциал, создаваемый элементом с поверхностной плотностью заряда, распределенной по закону (3):

$$U_s = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\ln[(x-x')^2 + y^2]}{\sqrt{x'}} dx'. \quad (4)$$

Последний интеграл может быть взят аналитически. Если расчетная точка находится в плоскости элемента, то соответствующие выражения приобретают вид:

$$U_s = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\sqrt{a} \ln(a-x) - 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(-x)} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(-x)}} \right],$$

$$x < 0;$$

$$U_s = \frac{1}{4\pi\epsilon} [\sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x'}) - 2\sqrt{x'} + 2(\sqrt{x'} - \sqrt{x}) \times \ln|x-x'|]_{x'=0}^{x'=a}, \quad x > 0;$$

$$U_s = \frac{1}{4\pi\epsilon} [\sqrt{a} \ln(a-2)], \quad x=0.$$

В том случае, если расчетная точка расположена за пределами плоскости сингулярного элемента, потенциал может быть найден из соотношения

$$8\pi\epsilon U_s = \sqrt{a} \ln[(x-a)^2 + y^2] - 4\sqrt{a} + \frac{2iy}{\sqrt{x-iy}} [\ln(t + \sqrt{x-iy}) - \ln(t + \sqrt{x-iy})]_{t=0}^{t=\sqrt{a}} - \sqrt{x+iy} [\ln(t - \sqrt{x+iy}) - \ln(t + \sqrt{x+iy})]_{t=0}^{t=\sqrt{a}}. \quad (5)$$

Несмотря на то, что в правой части последнего соотношения есть комплексные числа, окончательный результат является чисто вещественным. Все приведенные здесь выражения являются дифференцируемыми функциями, поэтому аналитические выражения для напряженности электрического поля также могут быть легко получены.

Свойства метода граничных элементов при использовании сингулярных базисных функций. Рассмотрим систему из двух бесконечно протяженных параллельных заряженных электродов, расположенных на расстоянии $2d$ друг от друга (рис. 5).

Будем считать, что к электродам приложено напряжение и их потенциалы равны $\pm U$. Распределение потенциала в окрестности такой системы мо-

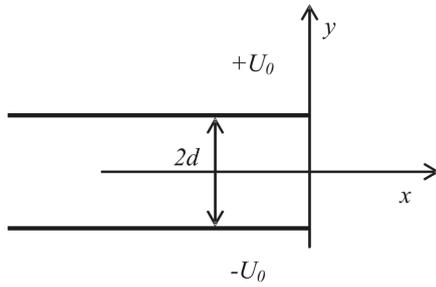


Рис. 5. Два параллельных заряженных электрода

жет быть найдено аналитически с помощью метода конформных преобразований [13]. Комплексный потенциал W на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ определяется соотношением:

$$z = x + iy = \frac{d}{\pi} \left(1 + e^{W\pi/2U_0} + \frac{W\pi}{2U_0} \right), \quad (6)$$

причем потенциал электрического поля может быть найден как $U(x, y) = \text{Im}(W)$. Вычислить значение потенциала U в произвольной точке с координатами x, y можно, решив систему уравнений

$$\begin{aligned} x &= \text{Re} \left\{ \frac{d}{\pi} \left(1 + e^{(V+iU)\pi/2U_0} + \frac{(V+iU)\pi}{2U_0} \right) \right\}; \\ y &= \text{Im} \left\{ \frac{d}{\pi} \left(1 + e^{(V+iU)\pi/2U_0} + \frac{(V+iU)\pi}{2U_0} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения этой задачи была использована численная процедура, основанная на алгоритме минимизации функционала Ньютона. Точность решения задачи составила $\delta \approx 10^{-15} U_0$, что вполне достаточно для верификации рассматриваемого численного метода расчета электростатического поля. Кроме потенциала для контроля точности получаемых решений, использовалась напряженность электрического поля, определяемая дифференцированием потенциала. Относительная точность расчета напряженности составила $\delta \approx 10^{-12}$, что достаточно для надежной верификации рассматриваемого численного метода расчета электрических полей.

Расчеты электрического поля вблизи от края конденсатора (рис. 5) были проведены на примере системы двух электродов с потенциалами $U_0 = \pm 100$ В, расположенных на расстоянии $2d = 2$ мм друг от друга. Соответственно напряженность электрического поля внутри конденсатора при $x \rightarrow -\infty$ равна $E \rightarrow 100$ В/мм. Важной частью процедуры решения рассматриваемой задачи является дискретизация расчетной области. В общем случае электрод может быть разбит на конечные элементы различной ширины. На первом шаге процедуры дискретизации электрод шириной $2D$ разбивается равномерно на $2N$ элементов, соответ-

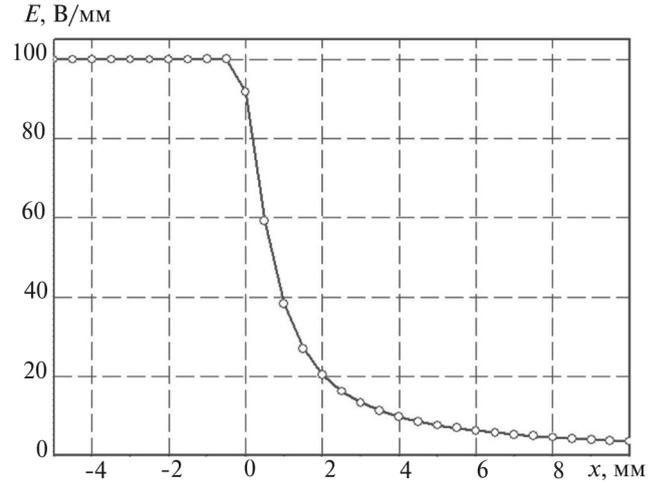


Рис. 6. Распределение напряженности электрического поля у края конденсатора вдоль линии $y = 0$

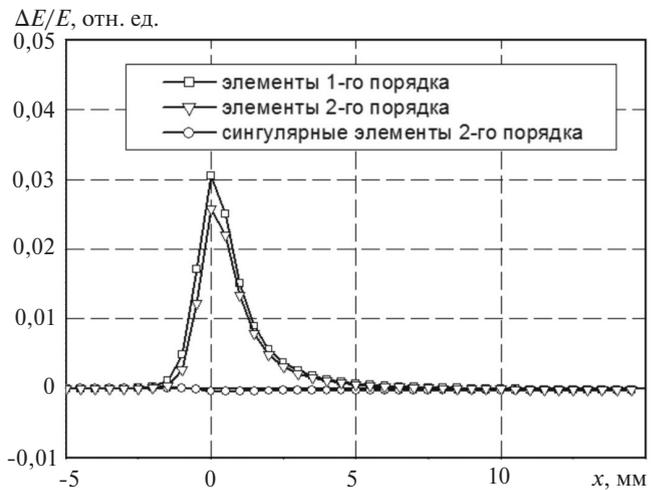


Рис. 7. Сравнение погрешности расчета напряженности электрического поля при использовании обычных и сингулярных аппроксимирующих функций

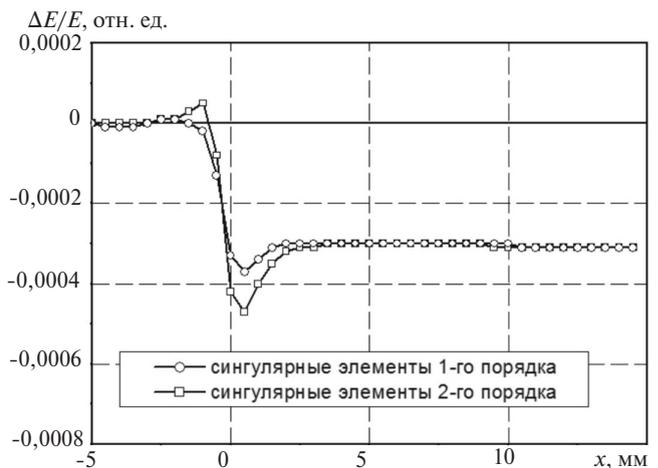


Рис. 8. Погрешность расчета напряженности электрического поля при использовании сингулярных элементов

ственно ширина всех элементов оказывается одинаковой и равной $a = D/N$. На втором шаге рассматриваемой процедуры узлы сетки перемещаются таким образом, что отношение длин соседних

элементов становится равным постоянной величине $\frac{a_i}{a_{i+1}} = k$. Таким образом легко создать сетку со сгущением узлов вблизи края электродов.

Аналитические выражения распределения напряженности электрического поля были получены для полубесконечных электродов. Очевидно, для проведения численных расчетов необходимо ограничить ширину этих электродов. В рассмотренных примерах она была выбрана равной $\Delta x = 1000d$. При таком выборе характеристик расчетной модели систематическая ошибка расчетов напряженности электрического поля не превышает 0,03%. При проведении тестовых расчетов электрод подвергался разбиению на 800 элементов. Коэффициент сгущения размеров элементов был выбран $k = 0,25$.

Основные результаты и их обсуждение. Основные результаты численного моделирования приведены на рис. 6–8. Как видно, точность расчета напряженности электрического поля при использовании традиционных методов аппроксимации составляет несколько процентов. В то же время применение сингулярных аппроксимирующих функций увеличивает точность расчетов на два порядка при такой же степени дискретизации.

Наблюдающиеся на рис. 8 расхождения между аналитическими и численными данными при $x \rightarrow \infty$ обусловлены реальными различиями в распределениях напряженности электрического поля в конденсаторе с неограниченными в направлении $x \rightarrow -\infty$ электродами и в конденсаторе с электродами конечной ширины ($\Delta x = 1000d$).

Результаты численных экспериментов показывают значительное увеличение точности расчета электрического поля при использовании сингулярных финитных функций для аппроксимации плотности заряда на электродах в сравнении с традиционными технологиями реализации методов граничных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреббия К., Теллс Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987, 524 с.
2. Клепка С.П., Ластовицкий А.Е., Павлов Г.Л. Математическое моделирование электростатических полей в системах

ближней локации. – Электромагнитные волны и электронные системы, 2012, т. 17, № 3, с. 4–10.

3. Горский А.Н., Сергеев Н.А. Расчет статических электрических и магнитных полей различной геометрии. – Электроника и электрооборудование транспорта, 2018, № 3, с. 17–22.

4. Калимов А.Г. Применение интегро-дифференциальных уравнений для расчета вихревых токов в многосвязных тонкостенных проводящих оболочках. – Электричество, 2010, № 5, с. 63–69.

5. Вольник Г. Оптика заряженных частиц. СПб.: Энергоатомиздат, 1992, 280 с.

6. Спивак-Лавров И.Ф., Байсанов Ш.А., Сапаралиев А.А., Тургамбаева А.У. Расчет приборных характеристик времяпролетного масс-спектрометра на основе клиновидного электростатического зеркала с двумерным полем. – Научное приборостроение, 2014, т. 24, № 1, с. 82–89.

7. Семкин Н.Д., Пияков И.В., Родин Д.В., Помельников Р.А. Аналитический метод расчета распределения электростатического поля отражателя времяпролетного масс-спектрометра. – Журнал Технической физики, 2012, т. 82, № 10, с. 79–84.

8. Пияков И.В., Баранов Н.А. Законы распределения электростатических полей между электродами экспериментального масс-спектрометра. – Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации, 2015, № 5-2, с. 164–167.

9. Dickel T., Lang J., Plass W., Lippert W., Geissel H., Schedenberger C., Yavor M. Dynamical time focus shift in multipole-reflection time-of-flight mass spectrometers. – International Journal of Mass Spectrometry, 2017, vol. 412, pp. 1–7.

10. Niegemann J. Efficient cubature rules for the numerical integration of logarithmic singularities. 2014 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2014, pp. 601–604.

11. Gurel L., Ergul O. Singularity of the magnetic-field Integral equation and its extraction. – IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2005 vol. 4, pp. 229 – 232.

12. Гринфельд Д.Э., Монастырский М.А. Расчет трехмерных электростатических полей с универсальным алгоритмом выделения особенностей поверхностного заряда на основе метода Фикеры. – Прикладная физика, 2002, № 36 с. 43–54.

13. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М.: Энергия, 1970, 376 с.

[09.12.2019]

А в т о р ы: Калимов Александр Гелиевич – доктор техн. наук, профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, докторскую диссертацию защитил в 2014 г.

Важнов Сергей Александрович – кандидат техн. наук, доцент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, диссертацию защитил в 1984 г.

Application of Singular Shape Functions for the Surface Charge Approximation in the Boundary Element Method

KALIMOV Alexander G. (*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*) – *Professor, Dr. Sci. (Eng.)*

VAZHNOV Sergey A. (*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*) – Associate Professor, Cand. Sci. (Eng.)

In this paper we consider application of singular functions for constructing finite element shape functions in problems of the electric field computation by the method of secondary sources. The main idea of this approach is based on the use of analytical solutions of the Laplace equation in the vicinity of special points of charged electrodes. Compared to traditional technologies of the charge density approximation on electrode surfaces, the considered approach allows to achieve high accuracy of calculation of electric field intensity in the vicinity of the charged object, including its angles and faces. The efficiency and high accuracy of the results obtained with such approximations is approved by comparison of the numerically derived field distributions with available analytical solutions.

К е у в о р д с: *electric field, integral equations, boundary elements, finite element method, singularity*

REFERENCES

1. **Brebbiya K., Tells Zh., Vroubel L.** *Metody granichnykh elementov* (Methods of boundary elements), 1987, 524 p.
2. **Klepka S.P., Lastovitskiy A.Ye., Pavlov G.L.** *Elektromagnitnyye volny i elektronnyye sistemy – in Russ. (Electromagnetic waves and electronic systems)*, 2012, vol. 17, No. 3, pp. 4–10.
3. **Gorskiy A.N., Sergeyenkov N.A.** *Elektronika i elektrooborudovaniye transporta – in Russ. (Electronics and electrical equipment of transport)*, 2018, No. 3, pp. 17–22.
4. **Kalimov A.G.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2010, No. 5, pp. 63–69.
5. **Vol'nik G.** *Optika zaryazhennykh chastits* (Optics of charged particles). SPb., Energoatomizdat, 1992, 280 p.
6. **Spivak-Lavrov I.F., Baisanov ShCh.A., Sapargaliyev A.A., Turgambayeva A.U.** *Nauchnoye priborostroyeniye – in Russ. (Scientific Instrumentation)*, 2014, vol. 24, No. 1, pp. 82–89.
7. **Semkin N.D., Piyakov I.V., Rodin D.V., Pomel'nikov R.A.** *Zhurnal Tekhnicheskoy fiziki – in Russ. (Journal of Technical Physics)*, 2012, vol. 82, No. 10, pp. 79–84.
8. **Piyakov I.V., Baranov N.A.** *Informatsionnyye tekhnologii. Radioelektronika. Telekommunikatsii – in Russ. (Information Technology. Radio Electronics. Telecommunications)*, 2015, No. 5-2, pp. 164–167.
9. **Dickel T., Lang J., Plass W., Lippert W., Geissel H., Schedenberger C., Yavor M.** *Dinamical time focus shift in multipole-reflection time-of-flight mass spectrometers. – International Journal of Mass Spectrometry*, 2017, vol. 412, pp. 1–7.
10. **Niegemann J.** *Efficient cubature rules for the numerical integration of logarithmic singularities. 2014 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, 2014, pp. 601–604.
11. **Gurel L., Ergul O.** *Singularity of the magnetic-field Integral equation and its extraction. – IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2005 vol. 4, pp. 229–232.
12. **Grinfel'd D.E., Monastyrskiy M.A.** *Prikladnaya fizika – in Russ. (Applied Physics)*, 2002, No. 36, pp. 43–54.
13. **Bins K., Laurenson P.** *Analiz i raschet elektricheskikh i magnitnykh poley* (Analysis and calculation of electric and magnetic fields). Moscow, Energy, 1970, 376 p.

[09.12.2019]