

Вектор Пойнтинга и новая теория трансформатора. Часть 10. Стержневые трансформаторы

ШАКИРОВ М.А.

Представлена корректная теория трансформаторов со стержневыми магнитопроводами, базирующаяся на идее передачи мощности от первичной обмотки ко вторичной посредством вектора Пойнтинга и предварительного анализа распределения векторного потенциала в них при идеальной магнитной проницаемости стали. Построена адаптивная схема замещения, названная так, поскольку в ней помимо отображения магнитных потоков участков стали, окна и потока выпучивания из стали все узлы соответствуют какой-либо граничной поверхности магнитопровода или обмоток. Благодаря этому топологическому свойству схема позволяет перейти к модели с непосредственным отображением на ней таких физических величин, как векторный потенциал, функция потоков и напряженность электрического поля на граничных поверхностях стали и обмоток. Переход к схеме замещения с реальной сталью осуществляется добавлением нелинейных ветвей, учитывающих насыщение и потери в стали. При этом в отличие от традиционной теории их суммарный ток рассматривается как ток утечек из-за некачественности стали, а не как ток намагничивания. Все представленные адаптивные схемы замещения пригодны для анализа установившихся и переходных процессов с выявлением сверх- и антипотоков в сравнении с потоками холостого хода. Это ставит анализ электродинамической устойчивости трансформаторов к аварийным ситуациям на более высокий уровень.

К л ю ч е в ы е с л о в а: трансформатор, стержневой магнитопровод, первичная и вторичная обмотки, магнитный поток, схема замещения, короткое замыкание, вектор Пойнтинга, векторный потенциал, напряженность электрического поля

Магнитная система стержневых трансформаторов, в отличие от броневой, несимметрична относительно осей обмоток. В одностержневом трансформаторе лишь часть обмоток охватывается сталью, а в двустержневом боковые ярма и вовсе отсутствуют [1–4].

Цель работы – выяснение особенностей распределения магнитных потоков в стержневых трансформаторах и построение для них схем замещения, учитывающих несимметрию их магнитных систем относительно обмоток. Определяются участки магнитопроводов, в которых могут возникнуть сверх- и антипотоки при коротких замыканиях (КЗ) в сравнении с потоками холостого хода (х.х.), что важно для оценки электродинамической стойкости трансформаторов в этих режимах. Как и в предыдущих частях [5 и 6], методика исследования основана на идее предварительного анализа работы идеализированного устройства, т.е. трансформатора с наилучшей сталью ($\mu_{\text{сталь}} = \infty$), допускающей при вполне приемлемых допущениях на этом этапе точный математический анализ физических процессов в любых условиях его работы. Переход к моделям реального трансформатора осуществляется наращиванием ветвей, отображающих потери и насыщение стали.

Вектор Пойнтинга в идеализированном трансформаторе. Особенности конструкции стержневых трансформаторов нагляднее всего раскрываются при анализе распределения магнитных потоков в их идеализированных моделях (рис. 1,а и б), в которых:

высота обмоток $h_w = h$, где h – высота окна;

бак представляет собой идеальный электромагнитный экран;

длина устройства в направлении, перпендикулярном рис. 1, равна l_0 ;

магнитное поле – плоскопараллельное, линии магнитной индукции в толще обмоток и между ними параллельны оси u ;

магнитный поток в любом участке стали распределяется равномерно по сечению стали;

пара из a и b обмоток на левом стержне двустержневого трансформатора (рис. 1,а) нагружена так же, как такая же пара обмоток на его правом стержне независимо от того, соединены эти пары последовательно или параллельно;

имеет место аналогия в картинах распределения магнитных потоков двустержневого (рис. 1,а) и одностержневого (рис. 1,б) трансформаторов;

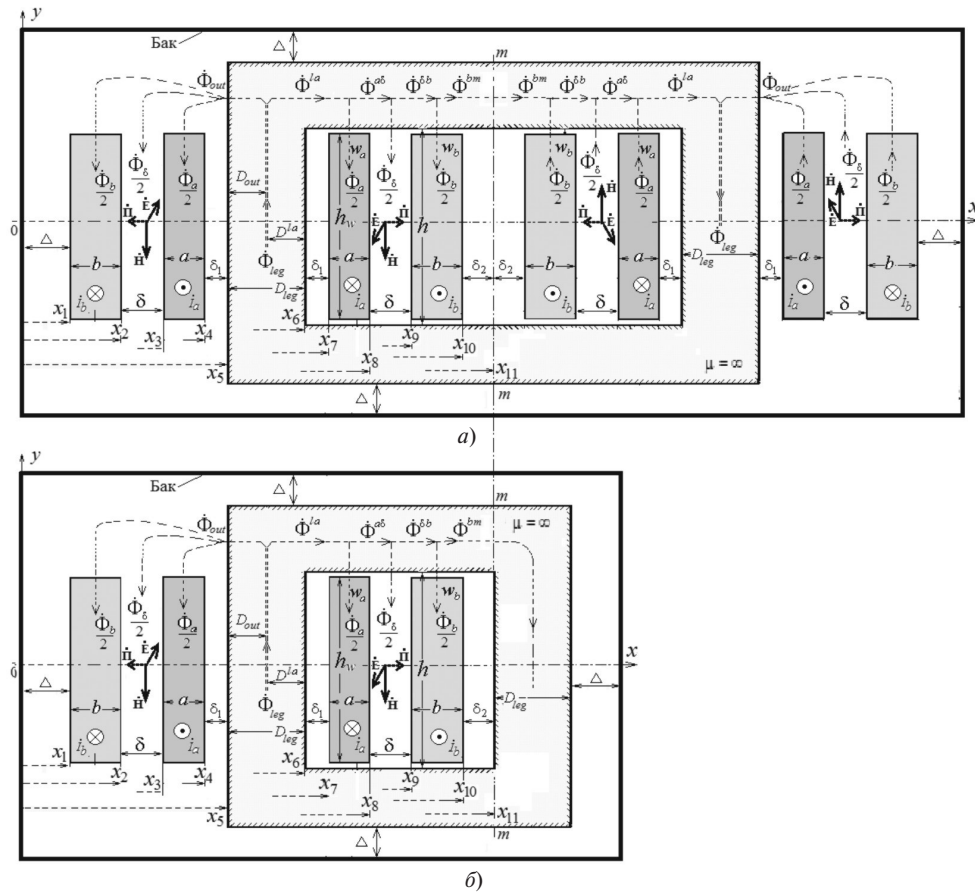


Рис. 1. Вектор Пойнтинга и магнитные потоки в идеализированных двустержневом (а) и одностержневом (б) трансформаторах с идеальным электромагнитным экраном (баком)

во внутренней a -обмотке (с числом витков w_a) протекает ток \dot{I}_a , а во внешней b -обмотке (с числом витков w_b) – ток \dot{I}_b , при этом

$$w_a \dot{I}_a = w_b \dot{I}_b; \tag{1}$$

коэффициент трансформации

$$n = w_a / w_b. \tag{2}$$

Распределение потоков (рис. 1, а и б) представлено для случая, когда роль первичной играет внутренняя a -обмотка, находящаяся под напряжением \dot{U}_a (в двустержневом трансформаторе под этим же напряжением находится a -обмотка на каждом стержне), ток в ней равен

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{jx_{sh} + Z'_{load}}, \tag{3}$$

где x_{sh} – ее сопротивление КЗ; $Z'_{load} = n^2 Z_{load}$ – приведенное к a -обмотке комплексное сопротивление нагрузки (Z_{load}) на вторичной b -обмотке. Приведенное напряжение на этой обмотке

$$\dot{U}'_b \equiv n \dot{U}_b = Z'_{load} \dot{I}_b, \tag{4}$$

где согласно (1)

$$\dot{I}'_b = \dot{I}_b / n = \dot{I}_a. \tag{5}$$

Утверждение 1. Поскольку первичные и вторичные обмотки охватывают друг друга, то с учетом (1) магнитные потоки и вектор Пойнтинга в Δ -промежутках и δ_2 -промежутках идеализированных стержневых трансформаторов (рис. 1, а и б) равны нулю.

Связи между магнитными потоками. Магнитный поток в стержне раздваивается:

$$\dot{\Phi}_{leg} = \dot{\Phi}^{la} + \dot{\Phi}_{out}, \tag{6}$$

причем его часть $\dot{\Phi}_{out}$ выпучивается из магнитопровода. Магнитный поток в половине a -обмотки, находящейся вне магнитопровода, такой же, как в ее половине, находящейся в окне; то же имеет место и в половинках b -обмотки, а также в зазорах между a - и b -половинками. Отсюда вытекает, что

$$\dot{\Phi}_{out} = \dot{\Phi}^{la} + \dot{\Phi}^{bm}. \tag{7}$$

Кроме того, сумма потоков в окне

$$\dot{\Phi}_{wind} = \frac{\dot{\Phi}_a}{2} + \frac{\dot{\Phi}_\delta}{2} + \frac{\dot{\Phi}_b}{2} \tag{8}$$

равна такой же сумме потоков вне магнитопровода, поэтому

$$\dot{\Phi}_{out} = \dot{\Phi}_{wind}. \quad (9)$$

Утверждение 2. Поток выпучивания $\dot{\Phi}_{out}$ равен потоку в окне трансформатора (рис. 1, *a* и *б*) в любом режиме его работы. Из (6) и (9) вытекают равенства:

$$\dot{\Phi}_{leg} = 2\dot{\Phi}_{wind} + \dot{\Phi}^{bm} = 2\dot{\Phi}^{la} - \dot{\Phi}^{bm}. \quad (10)$$

При х.х. потоки вне магнитопровода равны нулю. Потоки на всех участках стали в режиме х.х. равны потоку в стержне ($\dot{\Phi}_{leg}^{xx} = \dot{\Phi}_0$):

$$\dot{\Phi}_0^{la} = \dot{\Phi}_0^{ad} = \dot{\Phi}_0^{db} = \dot{\Phi}_0^{bm} = \dot{\Phi}_0 = \frac{\dot{U}_a}{j\omega w_a}, \quad (11)$$

при условном положительном направлении потока в ярме $\dot{\Phi}^{bm}$, согласованном с направлением потока в стержне $\dot{\Phi}_{leg}$ (рис. 1, *a* и *б*).

Утверждение 3. Если поток $\dot{\Phi}^{bm}$ окажется направленным навстречу потоку $\dot{\Phi}_{leg}$, то поток выпучивания ($\dot{\Phi}_{out}$) может оказаться превышающим значения остальных потоков стали в этом режиме.

Напряжения обмоток стержневого трансформатора, как и в броневом, можно выразить через потокосцепления обмоток:

$$\frac{\dot{U}_a}{j\omega} = \dot{\Psi}_a = w_a \dot{\Phi}_{leg} - \frac{w_a \dot{\Phi}_a}{3}; \quad (12)$$

$$\frac{\dot{U}'_b}{j\omega} = \dot{\Psi}'_b = w_a \dot{\Phi}^{bm} + \frac{w_a \dot{\Phi}_b}{3}. \quad (13)$$

Потоки в стали удовлетворяют следующим соотношениям (рис. 1, *a* и *б*):

$$\dot{\Phi}_{leg} = \dot{\Phi}^{la} + \dot{\Phi}_{out} = \dot{\Phi}_a + \dot{\Phi}_\delta + \dot{\Phi}_b + \dot{\Phi}^{bm}. \quad (14)$$

Адаптированная схема замещения. Соотношения (4)–(9) и (12)–(14) явно отображаются контурными уравнениями в схемной модели (рис. 2, *a*), условно названной адаптированной схемой замещения по двум причинам. Первая состоит в том, что помимо электрических величин в схеме представлены также магнитные потоки всех выделенных на рис. 1 участков в стали и окне. Объяснение нового принципа действия трансформатора (рис. 1, *a* и *б*) основывается на восприятии первичной и вторичной обмоток как единой системы, предназначенной для

создания в их межобмоточном δ -пространстве разности магнитных потенциалов между верхним и нижним торцевыми ярмами [5]:

$$\dot{U}_M = w_a \dot{I}_a \equiv w_b \dot{I}_b. \quad (15)$$

Под ее действием возникает суммарный магнитный поток δ -промежутков

$$\dot{\Phi}_\delta = \frac{\dot{U}_M}{R_\delta^M} = \frac{w_a \dot{I}_a}{h / (\mu_0 \delta 2l_0)}, \quad (16)$$

играющий важнейшую роль в формировании вектора Пойнтинга в межобмоточном пространстве. С учетом этих соотношений получаем связь:

$$\dot{\Phi}_\delta = \frac{\mu_0 \delta 2l_0}{h} w_a \dot{I}_a \rightarrow \frac{L_\delta \dot{I}_a}{w_a}; \quad (17)$$

$$L_\delta = \frac{\mu_0 w_a^2}{h} s_\delta; \quad s_\delta = 2l_0 \delta. \quad (18)$$

В толще внутренней *a*-обмотки разность магнитных потенциалов нарастает от нуля до значения \dot{U}_M . Его среднее значение равно $\dot{U}_M/2$, и в отличие от (16) суммарный магнитный поток *a*-обмотки определяется из соотношения:

$$\dot{\Phi}_a = \frac{\dot{U}_M/2}{R_a^M} = \frac{w_a \dot{I}_a/2}{h / (\mu_0 a 2l_0)} \rightarrow \frac{3 L_a \dot{I}_a}{2 w_a}; \quad (19)$$

$$L_a = \frac{\mu_0 w_a^2}{h} \frac{s_a}{3}; \quad s_a = 2l_0 a. \quad (20)$$

Аналогично для суммарного магнитного потока внешней *b*-обмотки имеем:

$$\dot{\Phi}_b = \frac{3 L'_b \dot{I}_a}{2 w_a}; \quad (21)$$

$$L'_b = \frac{\mu_0 w_a^2}{h} \frac{s_b}{3}; \quad s_b = 2l_0 b. \quad (22)$$

Связи (17), (19) и (21) отображены на схеме рис. 2, *a*. Они показывают, что в любой момент времени потоки $\dot{\Phi}_a, \dot{\Phi}_\delta, \dot{\Phi}_b$ соотносятся между собой как

$$\dot{\Phi}_a : \dot{\Phi}_\delta : \dot{\Phi}_b = \frac{3L_a}{2} : L_\delta : \frac{3L'_b}{2} = \frac{a}{2} : \delta : \frac{b}{2}. \quad (23)$$

Вторая причина принятого названия схем рис. 2, *a* состоит в ассоциации номеров ее узлов (*k*) с координатами (x_k) граничных поверхностей (рис. 1) и распределением функции потока $\dot{\Phi}_x = \Phi(x)$ при естественном граничном условии

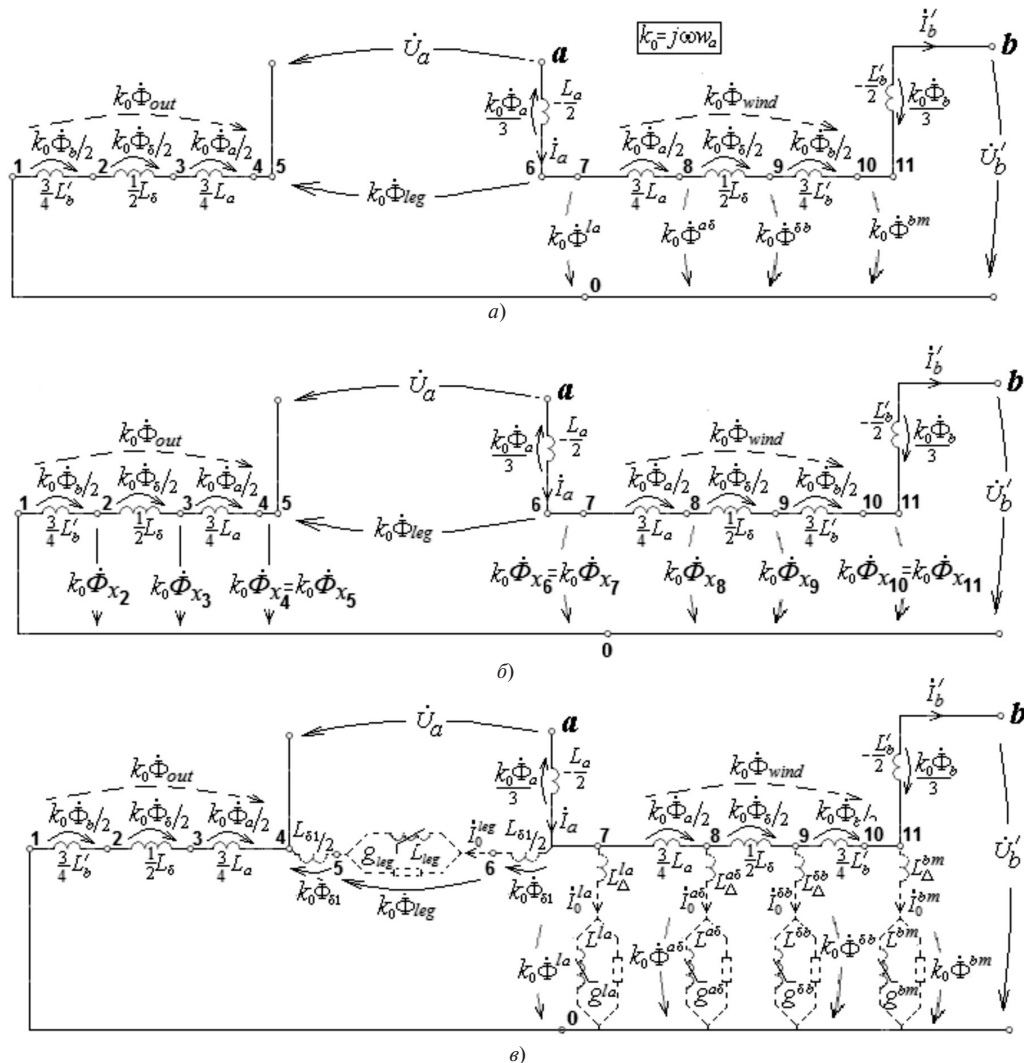


Рис. 2. Адаптированная схема замещения идеализированного стержневого трансформатора: а – с магнитными потоками; б – с функциями потоков; в – для реального трансформатора

$\dot{\Phi}_{x=0} = 0$. Потоки между поверхностью $x=0$ и поверхностями обмоток $x=x_7, x_8, x_9, x_{10}$ в окне можно выразить через потоки в стали:

$\dot{\Phi}_{x7}$	$\dot{\Phi}_{leg} - \dot{\Phi}_{out}$	$\dot{\Phi}^{la}$
$\dot{\Phi}_{x8}$	$\dot{\Phi}^{la} - \dot{\Phi}_a/2$	$\dot{\Phi}^{ad}$
$\dot{\Phi}_{x9}$	$\dot{\Phi}^{ad} - \dot{\Phi}_\delta/2$	$\dot{\Phi}^{db}$
$\dot{\Phi}_{x10}$	$\dot{\Phi}^{db} - \dot{\Phi}_b/2$	$\dot{\Phi}^{bm}$

что позволяет потоки в стали заменить функциями потоков (рис. 2,б).

Для перехода к схеме замещения с учетом насыщения и потерь в магнитопроводе добавляются поперечные ветви, отображающие утечку в нем части поступающей мощности из-за некачественности стали (рис. 2,в). Смысл параметров этих ветвей тот же, что и в [5–9], где их суммарный ток

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_0^{leg} + \dot{I}_0^a + \dot{I}_0^{ad} + \dot{I}_0^{db} + \dot{I}_0^{bm} = \dot{I}_a - \dot{I}'_b$$

рассматривается как ток утечки, а не «ток намагничивания».

Индуктивности Пойнтинга. Как и в броневом трансформаторе, наращивание вектора Пойнтинга в толще первичной a -обмотки на схеме замещения (рис. 2,а) отображается продольной индуктивностью L_a , его продвижение через δ -промежуток – индуктивностью L_δ , а его убывание в толще вторичной b -обмотки вследствие отдачи энергии непосредственно в нагрузку – индуктивностью L'_b . Согласно (18), (20), (22)

$$L_a : L_\delta : L'_b = \frac{a}{3} : \delta : \frac{b}{3}, \tag{24}$$

Суммируя, получаем индуктивность КЗ:

$$L_{sh} = L_a + L_\delta + L'_b = \frac{\mu_0 w_1^2}{h} \left(\frac{s_a}{3} + \delta + \frac{s_b}{3} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 w_1^2}{h} 2l_0 \left(\frac{a}{3} + \delta + \frac{b}{3} \right). \quad (25)$$

Величины L_a , L_δ , L'_b , как имеющие смысл индуктивностей продвижения (проталкивания) вектора Пойнтинга (электромагнитной энергии) в окне от первичной обмотки к вторичной, следует называть индуктивностями Пойнтинга (а не индуктивностями рассеяния).

П р и м е ч а н и е 1. Обозначая магнитные сопротивления пространств, занимаемых обмотками, и δ -промежутка между обмотками через

$$R_a^M = h / (\mu_0 a 2l_0); \quad R_b^M = h / (\mu_0 b 2l_0);$$

$$R_\delta^M = h / (\mu_0 \delta 2l_0), \quad (26)$$

можно индуктивности Пойнтинга представить также в виде:

$$L_a \approx \frac{w_a^2}{3R_a^M}; \quad L_\delta \approx \frac{w_a^2}{3R_\delta^M}; \quad L'_b \approx \frac{w_a^2}{3R_b^M}. \quad (27)$$

Отсюда следует мнемоническое правило: по отношению к индуктивностям L_a и L'_b , отражающим на схеме толщину обмоток, магнитное сопротивление утраивается!

Запишем:

$$\frac{L_a}{L_{sh}} = \frac{a}{(a+3\delta+b)}; \quad \frac{L_\delta}{L_{sh}} = \frac{3\delta}{(a+3\delta+b)};$$

$$\frac{L'_b}{L_{sh}} = \frac{b}{(a+3\delta+b)}. \quad (28)$$

Пример. Габариты трансформатора (рис. 1, а и б): $D_{leg} = 430$ мм; высота окна $h = 870$ мм; геометрические данные: $\delta_1 = 30$ мм; $a = 60$ мм; $\delta = 50$ мм; $b = 40$ мм; $\delta_2 = 50$ мм. Согласно (28)

$$\frac{L_a}{L_{sh}} = 0,24; \quad \frac{L_\delta}{L_{sh}} = 0,6; \quad \frac{L'_b}{L_{sh}} = 0,16. \quad (29)$$

Магнитные потоки в режиме КЗ идеализированного трансформатора. Помечая все величины при КЗ индексом sh (от термина short circuit), для тока при короткозамкнутой b -обмотке с учетом (11) имеем ($k_0 = j\omega w_a$):

$$i_1^{sh} \equiv i_a^{sh} = \frac{\dot{U}_a}{j\omega L_{sh}} \rightarrow \frac{k_0 \dot{\Phi}_0}{j\omega L_{sh}}. \quad (30)$$

Согласно второму закону Кирхгофа из схемы (рис. 2,а) в режиме КЗ следует:

$$j\omega \left(-\frac{L_a}{2} \right) i_a^{sh} + k_0 \dot{\Phi}_{leg}^{sh} = \dot{U}_a.$$

С учетом (30) находим, что поток в стержне при короткозамкнутой b -обмотке

$$\dot{\Phi}_{leg}^{sh} = \dot{\Phi}_0 + \left(\frac{L_a}{2} \right) \frac{\dot{\Phi}_0}{L_{sh}},$$

откуда согласно (19) и (20)

$$\frac{\dot{\Phi}_{leg}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} = 1 + \frac{L_a}{2L_{sh}} = 1 + \frac{a}{2(a+3\delta+b)}. \quad (31)$$

Как видно, при КЗ поток в первичном стержне превышает поток х.х., т.е. является сверхпоток КЗ. Для рассматриваемого примера согласно (21)

$$\frac{\dot{\Phi}_{leg}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} = 1 + \frac{L_a}{2L_{sh}} = 1 + \frac{0,24}{2} = 1,12. \quad (32)$$

Поток $\dot{\Phi}_{sh}^{bm}$ имеет смысл антипотока КЗ, поскольку из уравнения для правого контура схемы (рис. 2,а)

$$j\omega \left(-\frac{L'_b}{2} \right) i_a^{sh} - k_0 \dot{\Phi}_{sh}^{bm} = 0,$$

и при учете (30)

$$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{bm}}{\dot{\Phi}_0} = -\frac{L'_b}{2L_{sh}} = -\frac{b}{2(a+3\delta+b)}. \quad (33)$$

Знак минус означает, что поток $\dot{\Phi}_{sh}^{bm}$ направлен встречно потоку х.х. $\dot{\Phi}_0$. Для рассматриваемого примера согласно (21)

$$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{bm}}{\dot{\Phi}_0} = -\frac{0,16}{2} = -0,08. \quad (34)$$

Выражения для остальных потоков при КЗ b -обмотки представлены в табл. 1. Как видно, сверхпоток КЗ в стержне $\dot{\Phi}_{leg}^{sh}$ на 12% превышает

поток х.х. $\dot{\Phi}_0$. В двустержневом трансформаторе антипоток КЗ $\dot{\Phi}_{sh}^{bm}$ имеет место в середине ярма магнитопровода и составляет 8% потока х.х. Поток выпучивания $\dot{\Phi}_{out}$ из магнитопровода в данном примере при КЗ достигает 60% потока х.х. и превышает поток $\dot{\Phi}_{sh}^{la}$, ответвляющийся из стержня в

торцевое ярмо, в $\frac{\dot{\Phi}_{out}}{\dot{\Phi}_{sh}^{la}} = \frac{(a+2\delta+b)}{(a+2\delta+b/3)}$ раз.

В нашем примере, по данным табл. 1,

Таблица 1

Магнитные потоки при короткозамкнутой b -обмотке (рис. 1,а и б)

Область (участок) трансформатора (рис. 1,а и б)	Выражения для потоков через индуктивности Пойнтинга (рис. 1,б)	Формулы через геометрические величины (рис. 1,а)	Пример
Стержень	$\frac{\dot{\Phi}_{leg}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} = 1 + \frac{L_a}{2L_{sh}}$ (сверхпоток К3)	$1 + \frac{a}{2(a+3\delta+b)}$	1,12
Участок l, a стержня	$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{la}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L_a}{2L_{sh}} - \frac{L'_b}{2L_{sh}} \right)$	$\frac{3}{4} \left(\frac{a+2\delta+\frac{b}{3}}{a+3\delta+b} \right)$	0,52
Участок вне стержня	$\frac{\dot{\Phi}_{out}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{L_\delta}{L_{sh}} \right)$ (поток выпучивания при К3)	$\frac{3}{4} \frac{(a+2\delta+b)}{(a+3\delta+b)}$	0,6
Участок a, δ торцевого ярма	$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{a\delta}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L_a}{L_{sh}} - \frac{L'_b}{2L_{sh}} \right)$	$\frac{3\delta+b/2}{2(a+3\delta+b)}$	0,34
Участок δ, b торцевого ярма	$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{\delta b}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{L'_b}{4L_{sh}}$	$\frac{b}{4(a+3\delta+b)}$	0,04
Середина торцевого ярма (рис. 1,а). Боковое ядро (рис. 1,б)	$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{bm}}{\dot{\Phi}_0} = -\frac{L'_b}{2L_{sh}}$ (антипоток К3)	$-\frac{b}{2(a+3\delta+b)}$	-0,08
В толще половинки a -обмотки	$\frac{\dot{\Phi}_a^{sh}/2}{\dot{\Phi}_0} = \frac{3L_a}{4L_{sh}}$	$\frac{3a}{4(a+3\delta+b)}$	0,18
δ -промежуток между половинками обмоток	$\frac{\dot{\Phi}_\delta^{sh}/2}{\dot{\Phi}_0} = \frac{L_\delta}{2L_{sh}}$	$\frac{3\delta}{2(a+3\delta+b)}$	0,3
В толще половинки b -обмотки	$\frac{\dot{\Phi}_b^{sh}/2}{\dot{\Phi}_0} = \frac{3L'_b}{4L_{sh}}$	$\frac{3b}{4(a+3\delta+b)}$	0,12
Окно магнитопровода $\frac{\dot{\Phi}_{wind}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{\dot{\Phi}_a^{sh}}{2} + \frac{\dot{\Phi}_\delta^{sh}}{2} + \frac{\dot{\Phi}_b^{sh}}{2}$	$\frac{\dot{\Phi}_{wind}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{L_\delta}{3L_{sh}} \right)$	$\frac{3}{4} \frac{(a+2\delta+b)}{(a+3\delta+b)}$	0,6

$$\frac{\dot{\Phi}_{out}}{\dot{\Phi}_{sh}^{la}} = \frac{0,6}{0,52} = 1,15. \quad (35)$$

Распределение функции потока в трансформаторе с первичной внутренней a -обмоткой. Определяемый с точностью до произвольной постоянной векторный потенциал должен быть таким, чтобы одновременно соответствовать физическим условиям [6]:

$$\dot{E}(x) = -j\omega \dot{A}(x); \quad \dot{\Phi}(x) = l_0 \dot{A}(x), \quad (36)$$

где $\dot{\Phi}(x)$ – функция потока. В случае с рис. 1,а и б это имеет место, если принято

$$\dot{A}(x)|_{x=0} = 0; \quad \dot{\Phi}(x)|_{x=0} = 0. \quad (37)$$

Из (36)

$$\frac{\dot{A}(x)}{\dot{A}_0} = \frac{\dot{\Phi}(x)}{\dot{\Phi}_0} = \frac{\dot{E}(x)}{\dot{E}_0}, \quad (38)$$

где $\dot{A}_0 = \dot{\Phi}_0 / l_0$, $\dot{E}_0 = -j\omega \dot{A}_0$. В условиях принятых допущений напряженность магнитного поля $\dot{H}(x) = \dot{H}_y(x)$. Функции $\dot{H}(x)$ приведены в третьей колонке табл. 2. В этой же колонке даны выражения для потоков участков (рис. 1,а и б).

От соотношений для $\dot{A}(x)$, приведенных в табл. 2, согласно (36) легко перейти к выражениям для функции потока простым умножением на l_0 . В качестве иллюстрации на рис. 3,а представлены кривые распределения функции потока для нашего примера (при $0 < x < x_{11}$), рассчитанные по формулам табл. 2 при различных реактивных нагрузках.

Таблица 2

Распределение напряженности и векторного потенциала в идеализированном плоскопараллельном стержневом трансформаторе (рис. 1,а и б)

Область (зона)	Пределы изменения x в зоне	Напряженность: $\dot{H}(x) \equiv \dot{H}_y(x)$ и поток в k -й области $\dot{\Phi}_k$	Векторный потенциал: $\mathbf{A} \equiv A_z(x)\mathbf{k} \equiv A(x)\mathbf{k}$ $\dot{A}(x) \equiv \dot{A}_z(x)$
Δ -зона	$0 < x < x_1$	$\dot{H}(x) = 0$	$\dot{A}_\Delta(x) = 0$
Левая половинка b -обмотки вне окна	$x_1 < x < x_2$	$\dot{H}_b^{left} = -\frac{w_a \dot{I}_a (x-x_1)}{h} \frac{1}{b}$ $\dot{\Phi}_b^{left} = \frac{1}{2} \left(\frac{3 L_b \dot{I}_a}{2 w_a} \right)$	$\dot{A}_b^{left}(x) = -\frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_b^{left} \frac{(x-x_1)^2}{b^2}$
δ -зазор между левыми половинками a - и b -обмоток вне окна	$x_2 < x < x_3$	$\dot{H}_\delta = -\frac{w_a \dot{I}_a}{h}$ $\dot{\Phi}_\delta^{left} = \frac{1}{2} \left(\frac{L_\delta \dot{I}_a}{w_a} \right)$	$\dot{A}_\delta^{left} = -\frac{1}{l_0} \left(\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} \frac{(x-x_1)^2}{\delta} \right)$
Левая половинка a -обмотки вне окна	$x_3 < x < x_4$	$\dot{H}_a^{left} = -\frac{w_a \dot{I}_a (x_4-x)}{h} \frac{1}{a}$ $\dot{\Phi}_a^{left} = \frac{1}{2} \left(\frac{3 L_a \dot{I}_a}{2 w_a} \right)$	$\dot{A}_a^{left}(x) = -\frac{1}{l_0} \left(\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left} \frac{a^2 - (x_4-x)^2}{a^2} \right)$
δ_1 – зазор слева	$x_4 < x < x_5$	$\dot{H}_{\delta_1} = 0$ $\dot{\Phi}_{\delta_1} = 0$	$\dot{A}_{\delta_1}^{left}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left})$
Левый стержень	$x_5 < x < x_6$	$\dot{H}_{leg} = 0$ $\dot{\Phi}_{leg} = \frac{\dot{U}_a}{j\omega w_a} + \frac{L_a \dot{I}_a}{2 w_a}$	$\dot{A}_{leg}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left}) + \dot{\Phi}_{leg} \frac{(x-x_5)}{l_0 D_{leg}}$
δ_1 – зазор справа	$x_6 < x < x_7$	$\dot{H}_{\delta_1} = 0$ $\dot{\Phi}_{\delta_1} = 0$	$\dot{A}_{\delta_1}^{right}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left}) + \frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_{leg}$
Правая половинка a -обмотки в окне	$x_7 < x < x_8$	$\dot{H}_a^{right} = -\frac{w_a \dot{I}_a (x-x_7)}{h} \frac{1}{a}$ $\dot{\Phi}_a^{right} = \frac{1}{2} \left(\frac{3 L_a \dot{I}_a}{2 w_a} \right)$	$\dot{A}_a^{right}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left}) + \frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_{leg} - \frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_a^{right} \frac{(x-x_7)^2}{a^2}$
δ – зазор между правыми половинками a - и b -обмоток в окне	$x_8 < x < x_9$	$\dot{H}_\delta = -\frac{w_a \dot{I}_a}{h}$ $\dot{\Phi}_\delta^{right} = \frac{1}{2} \left(\frac{L_\delta \dot{I}_a}{w_a} \right)$	$\dot{A}_\delta^{right}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left} - \dot{\Phi}_{leg}) - \frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_a^{right} - \frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_\delta^{right} \frac{(x-x_8)^2}{\delta}$
Правая половинка b -обмотки в окне	$x_9 < x < x_{10}$	$\dot{H}_b^{right} = -\frac{w_a \dot{I}_a (x_{10}-x)}{h} \frac{1}{b}$ $\dot{\Phi}_b^{right} = \frac{1}{2} \left(\frac{3 L_b \dot{I}_a}{2 w_a} \right)$	$\dot{A}_b^{right}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left} - \dot{\Phi}_{leg}) - \frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_a^{right} + \dot{\Phi}_\delta^{right}) - \frac{1}{l_0} \dot{\Phi}_b^{right} \frac{b^2 - (x_{10}-x)^2}{b^2}$
δ_2 – зазор в окне	$x_{10} < x < x_{11}$	$\dot{H}_{\delta_2} = 0$ $\dot{\Phi}_{\delta_2} = 0$	$\dot{A}_{\delta_2}(x) = -\frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_b^{left} + \dot{\Phi}_\delta^{left} + \dot{\Phi}_a^{left} - \dot{\Phi}_{leg}) - \frac{1}{l_0} (\dot{\Phi}_a^{right} + \dot{\Phi}_\delta^{right} + \dot{\Phi}_b^{right})$

Ординаты кривых при $x = x_5$ характеризуют потоки выпучивания. По кривой для режима КЗ b -обмотки получаем

$$\frac{\Phi_{out}^{sh}}{\Phi_0} = \frac{A_{x5}^{sh}}{A_0} = 0,6, \tag{39}$$

что совпадает с расчетом в табл. 1. При этом вытекает следующее положение.

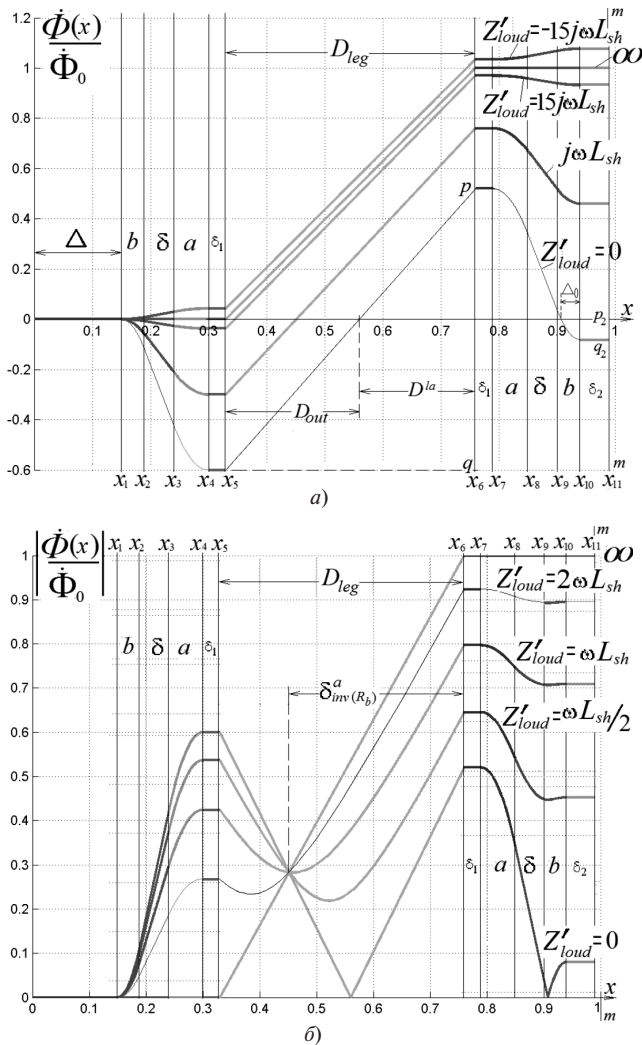


Рис. 3. Распределение функции потока в трансформаторе с первичной внутренней *a*-обмоткой: *a* – чисто реактивная нагрузка; *б* – чисто активная нагрузка

Утверждение 4. Расчленение потока в стержне при КЗ происходит таким образом, что поток выпучивания $\dot{\Phi}_{out}^{sh}$ оказывается больше потока $\dot{\Phi}_{sh}^{la}$, ответвляющегося в стыковое яро магнитопровода. Соответственно и площадь, занимаемая потоком $\dot{\Phi}_{out}^{sh}$ в стержне, больше площади, занимаемой в стержне потоком $\dot{\Phi}_{sh}^{la}$; по формулам табл. 1 найдем (рис. 1, *a* и *б*):

$$\frac{D_{out}^{sh}}{D_{sh}^{la}} = \frac{\dot{\Phi}_{out}^{sh}}{\dot{\Phi}_{sh}^{la}} = \frac{(a + 2\delta + b)}{a + 2\delta + b/3} = 1,1638. \quad (40)$$

Пропорция (40) очевидным образом вытекает из принятого допущения о равномерности распределения индукции по сечению в любом участке стали. Ее можно также вывести из уравнения

$$\dot{A}_{leg}(x) \Big|_{\dot{I}_a = \dot{U}_a / jx_{sh}} = 0, \quad (41)$$

из которого вначале находим

$$\frac{D_{out}^{sh}}{D_{leg}} = \frac{3(a + 2\delta + b)}{2(3a + 6\delta + 2b)} = 0,5358, \quad (42)$$

затем, учитывая $D_{sh}^{la} = D_{leg} - D_{out}^{sh}$, нетрудно получить формулу (40).

Отрезок $pq = 1,12$ характеризует сверхпоток КЗ, а отрезок $p_2q_2 = -0,08$ – антипоток при КЗ *b*-обмотки.

Утверждение 5. В отличие от броневых в стержневых трансформаторах с первичной внутренней *a*-обмоткой АЕФ-инвариантных плоскостей, т.е. поверхностей, на которых значения величин *A*, *E* и Φ не зависят от нагрузки, нет! Зато имеются две нуль-поверхности при КЗ (линии расчленения при КЗ), на которых значения этих величин равны нулю. Согласно (42) одна из них характеризуется координатой $x = x_5 + D_{out}^{sh}$, другая находится в окне внутри *b*-обмотки (рис. 3, *a*).

Линия раздела потоков в окне при КЗ *b*-обмотки. Для вывода координат этой линии необходимо воспользоваться уравнением:

$$\dot{A}_b^{right}(x) \Big|_{\dot{I}_a = \dot{U}_a / jx_{sh}} = 0, \quad (x_9 < x < x_{10}),$$

откуда

$$x_0 = x_{10} - \Delta_0, \quad (43)$$

т.е. линия раздела находится на расстоянии

$$\Delta_0 = b\sqrt{2/3} \quad (44)$$

от внешнего края короткозамкнутой *b*-обмотки в окне. На этой линии значения величин *A*, *E* и Φ при КЗ равны нулю. В нашем примере $\Delta_0 = 32,7$ мм. Напомним, что в броневом трансформаторе $\Delta_0 = b/\sqrt{3}$ [5,9].

|АЕФ|-инвариантные поверхности при чисто активных нагрузках. Из анализа кривых на рис. 3, *б* вытекает следующее положение.

Утверждение 6. При чисто активной нагрузке на *b*-обмотке ($Z_{load} \equiv R_{load}$) образуется |АЕФ|-инвариантная по модулю величин $A = |A|$, $E = |E|$ и $\Phi = |\Phi|$ плоскость внутри стержня на расстоянии $\delta_{inv}^a(R_b)$ от его внутреннего края, т.е. при

$$x \rightarrow x_{inv}^a(R_b) = x_6 - \delta_{inv}^a(R_b). \quad (45)$$

Индекс $inv(R_b)$ читается как |АЕФ|-инвариантность относительно нагрузки R_b . В рассматриваемом примере (рис. 3, *б*):

$$\delta_{inv(R_b)}^a = 0,7170 D_{leg};$$

$$\Phi \Big|_{x=x_6-\delta_{inv(R_b)}^a} / \Phi_0 = 0,283. \quad (46)$$

Доказательство и вывод формулы для $\delta_{inv(R_b)}^a$ существенно упрощается, если учесть, что через точку $x=x_6-\delta_{inv(R_b)}^a$ проходят также кривая х.х. ($\dot{I}'_b = \dot{I}'_a = 0$) и кривая модуля функции потока при КЗ ($\dot{U}'_b = 0; \dot{I}'_a = \dot{U}'_a / j\omega L_{sh}$). Отсюда вытекает, что для определения этой точки можно воспользоваться уравнением

$$\dot{A}'_{leg}(x) \Big|_{\dot{I}'_b=0} = \dot{A}'_{leg}(x) \Big|_{\dot{U}'_b=0}, \quad (47)$$

решение которого дает

$$\delta_{inv(R_b)}^a = \frac{7a+18\delta+5b}{10a+24\delta+8b} D_{leg}, \quad (48)$$

при этом

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi_0} \Big|_{x=x_6-\delta_{inv(R_b)}^a} = \frac{A(x)}{A_0} \Big|_{x=x_6-\delta_{inv(R_b)}^a} = 1 - \frac{\delta_{inv(R_b)}^a}{D_{leg}}. \quad (49)$$

Утверждение 6 представляет собой частный случай более общего положения относительно нагрузок $Z_{load} \equiv R_b + jX_b$ с фиксированным значением X_b . Отсюда следует, что в *Утверждении 6* говорится об *АЕФ*-инвариантности для частного случая $X_b = 0$, тогда как число этих поверхностей бесконечно.

Распределение функции потока в трансформаторе с первичной внешней *b*-обмоткой. В этом случае первично напряжение \dot{U}_b или \dot{U}'_b (рис. 2,а). При использовании \dot{U}'_b все параметры схемы замещения остаются прежними, т.е. приведенными к *a*-обмотке, при этом ток в схеме

$$\dot{I}'_a = - \frac{\dot{U}'_b}{j\omega L_{sh} + Z_{load}}, \quad (50)$$

где Z_{load} – нагрузка на зажимах *a*-обмотки.

Это позволяет использовать все формулы табл. 2 для получения эпюр распределения функции потока в трансформаторе с первичной *b*-обмоткой (рис. 4). В соответствии с правилами [6] нуль-поверхности при КЗ *b*-обмотки должны превратиться в *АЕФ*-инвариантные поверхности при становлении *b*-обмотки первичной. Поэтому на рис. 4 имеют место сразу две *АЕФ*-инвариантные поверхности – одна в стержне, другая в окне внутри первичной *b*-обмотки (и не одной нуль-поверхности, пересекающей ось *x* в этих местах). Координату $x = x_0^b$ *АЕФ*-поверхности в стержне можно определить из условия пересечения кривых х.х. и КЗ:

$$\dot{A}'_{leg}(x) \Big|_{\dot{I}'_b=0} = \dot{A}'_{leg}(x) \Big|_{\dot{U}'_a=0}, \quad (51)$$

учитывая при этом, что в режиме КЗ *a*-обмотки ($\dot{U}'_a = 0$) ток

$$\dot{I}'_a \Big|_{\dot{U}'_b=0} = - \frac{\dot{U}'_b}{j\omega L_{sh}}. \quad (52)$$

Решив (51), находим

$$x_0^b = x_5 + \delta_0^b,$$

где, как и следовало ожидать,

$$\delta_0^b = D_{out}^{sh}. \quad (53)$$

При этом функция потока на этой *АЕФ*-поверхности

$$\frac{\dot{\Phi}_{leg}(x_0^b)}{\dot{\Phi}_0} = \frac{\delta_0^b}{D_{leg}}. \quad (54)$$

В нашем примере:

$$\delta_0^b = \frac{3(a+2\delta+b)}{2(3a+6\delta+2b)} D_{leg} = 0,2304 \text{ м};$$

$$x_0^b = x_5 + \delta_0^b = 0,33 + 0,2304 = 0,5604 \text{ м};$$

$$\frac{\dot{\Phi}_{leg}(x_0^b)}{\dot{\Phi}_0} = \frac{\delta_0^b}{D_{leg}} = \frac{0,2304}{0,43} = 0,5357,$$

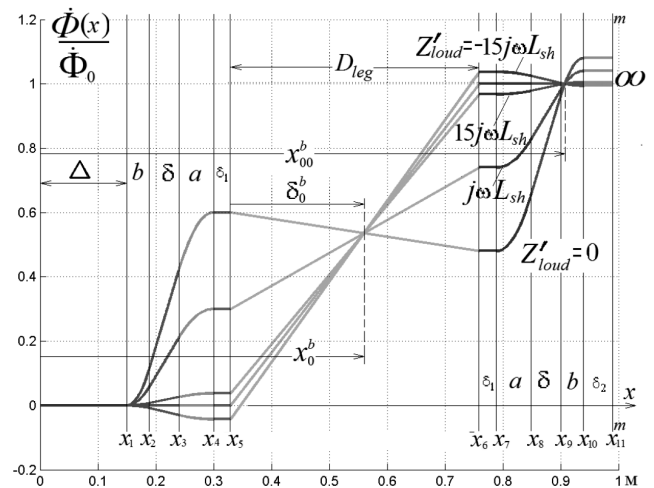


Рис. 4. Распределение векторного потенциала при чисто реактивных нагрузках в трансформаторе с первичной внешней *b*-обмоткой

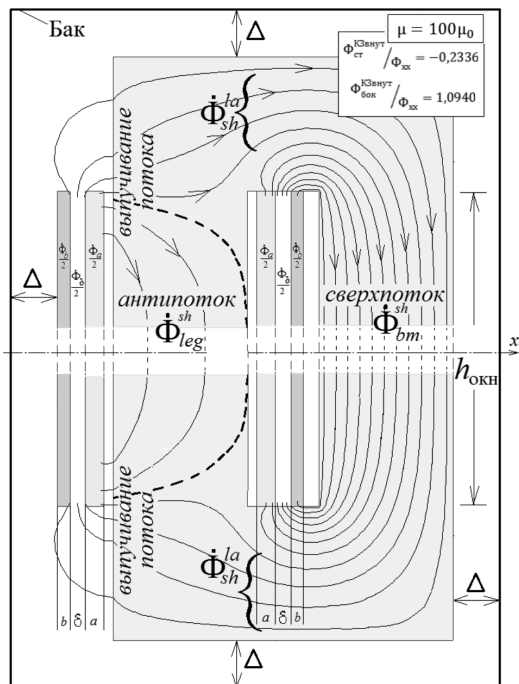


Рис. 5. Картина магнитного поля в трансформаторе в режиме КЗ внутренней *a*-обмотки

что совпадает с данными на рис. 4.

Для определения координаты $x = x_{00}^b$ АЕФ-поверхности внутри правой половинки *b*-обмотки в окне можно воспользоваться уравнением

$$\frac{\dot{A}_b^{right}(x)}{A_0} \Big|_{U_a=0} = 1,$$

решение которого, как и ожидалось, совпадает с правой частью (43):

$$x_{00}^b = x_{10} - \Delta_0.$$

В нашем примере

$$x_{00}^b = 0,94 - 0,04\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,9037 \text{ м},$$

что совпадает с результатом на рис. 4.

В режиме КЗ *b*-обмотки в стержне возникает антипоток КЗ, равный

$$\frac{\dot{\Phi}_{leg}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} \Big|_{U_a=0} = -\frac{L_a}{2L_{sh}} = -\frac{0,24}{2} = -0,12,$$

тогда как поток $\dot{\Phi}^{bm}$ становится сверхпоток КЗ:

$$\frac{\dot{\Phi}_{sh}^{bm}}{\dot{\Phi}_0} \Big|_{U_a=0} = 1 + \frac{L'_b}{2L_{sh}} = 1 + \frac{0,16}{2} = 1,08,$$

что качественно подтверждается на картине поля (рис. 5), построенной численно по МКЭ при ко-

нечном значении $\mu = 100\mu_0$ [7–9]. Пунктиром показано, что линия раздела потоков при КЗ *a*-обмотки все же существует и разделяет поток выпучивания на антипоток $\dot{\Phi}_{out}^{sh}$ и поток ярма $\dot{\Phi}_{sh}^{la}$.

Еще одно отличие: при чисто активной нагрузке дополнительных |АЕФ|-инвариантных поверхностей не образуется.

Непосредственно по схеме (рис. 2,а) можно убедиться в следующем.

Утверждение 7. Поток выпучивания в трансформаторе при КЗ внутренней *a*-обмотки вычисляется по той же формуле, что и при КЗ *b*-обмотки, т.е.

$$\frac{\dot{\Phi}_{out}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} \Big|_{U_a=0} = \frac{\dot{\Phi}_{out}^{sh}}{\dot{\Phi}_0} \Big|_{U_b=0} = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{L_\delta}{L_{sh}} \right) = \frac{3(a + 2\delta + b)}{4(a + 3\delta + b)}.$$

Поэтому ординаты кривых при $x = x_5$ на рис. 3,а и 4, характеризующие потоки выпучивания, совпадают и в обоих случаях равны 0,6.

В целом полученные здесь и в [5–9] результаты являются следствием целого ряда работ, критиковавших Т- и П-образные схемные модели трансформаторов на протяжении более 100 лет [10–24].

Заключение. Представленные Утверждения 1÷7 акцентируют внимание на различия физических процессов в броне- и стержневых трансформаторах, что объясняет существенное отличие их схем замещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины, т. 1. М.: Издательский дом МЭИ, 2006, 652 с.
2. Серебряков А.С. Трансформаторы. М.: Издательский дом МЭИ, 2013, 360 с.
3. Сергеевков Б.Н., Киселев В.М., Акимова Н.А. Электрические машины. Трансформаторы/Под ред. И.П. Копылова. М.: Высшая школа, 1989, 352 с.
4. Kulcarni S.V., Kharparde S.A. Transformer Engineering: Desine and Practice, CRC Press, Boca Raton, Fl, 2004, p. 467.
5. Шакиров М.А. Вектор Пойнтинга и новая теория трансформаторов. Часть 2. – Электричество, 2014, № 10, с. 53–65.
6. Шакиров М.А. Вектор Пойнтинга и новая теория трансформаторов. Часть 4. «Анатомия» трансформатора. – Электричество, 2017, № 3, с. 37–49.
7. Шакиров М.А., Варламов Ю.В. Картины магнитных сверх- и антипотоков в короткозамкнутом двухобмоточном трансформаторе, ч. 2. Двустержневой трансформатор. – Электричество, 2015, № 9, с. 27–38.
8. Практикум по ТОЭ. Часть 3/Под ред. М.А. Шакирова. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2017, 300 с.
9. Шакиров М.А., Ткачук А.А. Ф-инвариантные поверхности в обмотках броневого двухобмоточного трансформатора. – Изв. ПГУПС, 2018, вып. 4, с. 643–659.
10. Voyajian A. Resolution of transformer reactances into primary and secondary reactances. AIEE Trans., Jun. 1925, pp. 805–810.

11. **Марквардт Е.Г.** Электромагнитные расчеты трансформаторов. М.: ОНТИ, Редакция энергетической литературы, 1938, 136 с.
12. **Cherry E.C.** The duality between interlinked electric and magnetic circuits and the formulation of transformer equivalent circuits. — Proc. of the Physical Society, vol. (B) 62, Feb. 1949, pp.101–111.
13. **Blume L.F., Boyajian A., Gamilly G., Lenox T.C., Minnes S. Montsinger M.V.** Transformer Engineering: A treatise on the Theory, Operation and Application of Transformer. New York: Wiley, 1951, 239 p.
14. **Slemon G.R.** Equivalent Circuits for Transformers and machines including nonlinear effects. — Proc. Inst. Elect. Eng., IV, 1953, vol. 100, pp.129–143.
15. **Пенчев П.Р.** Вверху разсейването в трансформаторите. София: Техника, 1969, 123 с.
16. **Лейтес Л.В.** Эквивалентная схема двухобмоточного трансформатора, опыты х.х. и к.з. — Труды ВЭИ. М., 1969, с. 277–297.
17. **Лейтес Л.В., Пинцов А.М.** Схемы замещения многообмоточных трансформаторов. М.: Энергия, 1974, 192 с.
18. **Григорьев И.Б.** Потоки в магнитопроводах мощных силовых трансформаторов и автотрансформаторов с учетом потока рассеяния. — Электротехника, 1975, № 4, с. 20–25.
19. **Электродинамическая** стойкость трансформаторов и реакторов при коротких замыканиях/Под ред. А.И. Лурье. М.: Знак, 2005, 520 с.
20. **Martinez J.A., Mork B.** Trsformer modelinfor low and mid-friquency transients. — IEEE Trans. Power Del., 2005, vol. 20, No 2, pt. 2, pp. 1525–1632.
21. **Leon F., Gomez P., Martinez-Velasco, Rioual M.** Transformers in Power System Transients: Parameter Determination. Ed. Boca Raton, FL: CRC, 2009, ch. 4, pp. 177–250.
22. **Leon F., Farazmand A., Joseph.** Comparing the T and Equivalent Circuits for the Calculation of Transformer Inrush Currents. — IEEE Trans. Power Delivery, October 2012, vol. 27, No. 4, pp. 2390–2397.
23. **В.С. Ларин.** Вопросы трансформаторостроения на 44-й сессии СИГРЭ. — Электричество, 2013, № 5, с. 51–63.
24. **Мальгин В.М.** Локализация потока энергии в трансформаторе. — Электричество, 2015, № 4, с. 60–65.

[30.10.2019]

А в т о р: Шакиров Мансур Акмелович — доктор техн. наук, профессор Санкт-Петербургского университета Петра Великого, докторскую диссертацию защитил в 1980 г.

Electrichestvo, 2020, No. 3, pp. 39–50

DOI:10.24160/0013-5380-2020-3-39-50

Poynting's Vector and a New Theory of Transformers. Part 10. Bar Transformers

SHAKIROV Mansur A. (*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia*) —
Professor, Dr. Sci. (Eng.)

A correct theory of transformers with rod magnetic circuits is presented, which is based on the idea according to which the power from the primary winding is transferred to the secondary one by means of the Poynting vector, and on a preliminary analysis of the vector potential distribution in them with ideal magnetic permeability of steel. An adaptive equivalent circuit is constructed, which is called so because in addition to reflecting the magnetic fluxes in the steel sections, core winding window, and fringing flow, all its nodes correspond to some boundary surface of the magnetic circuit or windings. Owing to this topological property, the circuit allows one to switch to a model that directly reflects such physical quantities as the vector potential, flow function, and electric field strength at the boundary surfaces of steel and windings. The transition to the equivalent circuit with real steel is done by adding nonlinear branches that take into account saturation and iron losses. In contrast to the traditional theory, their total current is considered as a leakage current due to steel non-ideality and not as a magnetization current. All of the presented adaptive equivalent circuits are suitable for analyzing steady-state and transient processes with identifying over- and anti-fluxes in comparison with idling fluxes, a feature which puts the analysis of transformer electrodynamic stability to emergency situations to a higher level.

Key words: *transformer, rod magnetic circuit, primary and secondary windings, magnetic flux, equivalent circuit, short circuit, Poynting vector, vector potential, electric field strength*

REFERENCES

1. **Ivanov-Smolenskiy A.V.** *Elektricheskiye mashiny, t. 1* (Electric machines, vol. 1). Moscow, MEI Publ. House, 2006, 652 p.
2. **Serebryakov A.S.** *Transformatory* (Transformers). Moscow, MEI Publ. House, 2013, 360 p.
3. **Sergeyenko B.N., Kiselev V.M., Akimova N.A.** *Elektricheskiye mashiny. Transformatory/Pod red. I.P. Kopylova* (Electric cars. Transformers/Ed. I.P. Kopylov). Moscow, Vysshaya shkola, 1989, 352 p.
4. **Kulcarni S.V., Khaparde S.A.** *Transformer Engineering: Desine and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2004, 467 p.
5. **Shakirov M.A.** *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 10, pp. 53–65.
6. **Shakirov M.A.** *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2017, No. 3, pp. 37–49.

7. **Shakirov M.A., Varlamov Yu.V.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2015, No. 9, pp. 27–38.
8. **Praktikum po TOE. Chast' 3/Pod red. M.A. Shakirova.** (Workshop on TOE. Part 3 / Ed. M.A. Shakirov). St. Petersburg, Publ. of the Polytechnic University, 2017, 300 p.
9. **Shakirov M.A., Tkachuk A.A.** *Izv. PGUPS – in Russ. (News of the St. Petersburg State University of Railway Engineering)*, 2018, vol. 4, pp. 643–659.
10. **Boyajian A.** Resolution of transformer reactances into primary and secondary reactances. – *AIEE Trans.*, Jun. 1925, pp. 805–810.
11. **Markvardt Ye.G.** *Elektromagnitnyye raschety transformatorov* (Electromagnetic calculations of transformers). Moscow, ONTI, Redaktsiya energeticheskoy literatury, 1938, 136 p.
12. **Cherry E.C.** The duality between interlinked electric and magnetic circuits and the formulation of transformer equivalent circuits. – *Proc. of the Physical Society*, vol. (B) 62, Feb. 1949, pp.101–111.
13. **Blume L.F., Boyajian A., Gamilly G., Lenox T.C., Minnec S. Montsinger M.V.** *Transformer Engineering: A treatise on the Theory, Operation and Application of Transformer*. New York: Wiley, 1951, 239 p.
14. **Slemon G.R.** Equivalent Circuits for Transformers and machines including nonlinear effects. – *Proc. Inst. Elect. Eng.*, IV, 1953, vol. 100, pp.129–143.
15. **Penchev P.R.** V"yerkhu razseivaneto v transformatorite (On the dissipation in transformers). Sofiya, Tekhnika, 1969, 123 p.
16. **Leytes L.V.** *Ekvivalentnaya skhema dvukhobmotochnogo transformatora, opyty kh.kh. i k.z.* (An equivalent circuit of a double winding transformer, experiments x.h. and short). Trudy VEI, Moscow, 1969, pp. 277–297.
17. **Leytes L.V., Pintsov A.M.** *Skhemy zameshcheniya mnogoobmotochnykh transformatorov* (Equivalent circuits of multi-turn transformers). Moscow, Energiya, 1974, 192 p.
18. **Grigorov I.B.** *Elektrotehnika – in Russ. (Electrical Engineering)*, 1975, No. 4, pp. 20–25.
19. **Elektrodinamicheskaya stoykost' transformatorov i reaktorov pri korotkikh zamykaniyakh/Pod red. A.I. Lur'ye** (Electrodynamic resistance of transformers and reactors during short circuits / Ed. A.I. Lurie). Moscow, Znak, 2005, 520 p.
20. **Martinez J.A., Mork B.** Trsformer modelinfor low and mid-friquency transients. – *IEEE Trans. Power Del.*, 2005, vol. 20, No 2, pt. 2, pp. 1525–1632.
21. **Leon F., Gomez P., Martinez-Velasco, Rioual M.** *Transformers in Power System Transients: Parameter Determination*. Ed. Boca Raton, FL: CRC, 2009, ch. 4, pp. 177–250.
22. **Leon F., Farazmand A., Joseph.** Comparing the T and Equivalent Circuits for the Calculation of Transformer Inrush Currents. – *IEEE Trans. Power Delivery*, October 2012, vol. 27, No. 4, pp. 2390–2397.
23. **V.S. Larin.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2013, No. 5, pp. 51–63.
24. **Malygin V.M.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2015, No. 4, pp. 60–65.

[30.10.2019]