Сообщения

Электричество, 2020, № 9, с. 54—57 *DOI:10.24160/0013-5380-2020-9-54-57*

Магнитное поле неидеальных катушек Гельмгольца

ХАРАБАДЗЕ Д.Э., НИКОЛАДЗЕ Г.М., ШЕВЦОВ В.С., ПОЛЯКОВ П.А.

Обосновывается важность испытания электронных устройств на воздействие постоянного магнитного поля. Исследуется магнитное поле, создаваемое катушками Гельмгольца конечного прямоугольного сечения. Выводится аналитическое выражение для магнитного поля на оси соленоида конечной толщины и магнитного поля на оси катушек Гельмгольца прямоугольного сечения. В частном случае применения катушек Гельмгольца квадратного сечения численно анализируется условие обращения в нуль второй производной магнитного поля вдоль оси симметрии системы в ее центре. Это дает возможность определить расстояние между катушками квадратного сечения, при котором поле в центре системы является наиболее однородным. Показано, что учёт конечности сечения приводит к изменению оптимального расстояния между катушками. Составлена таблица оптимальных расстояний для катушек Гельмгольца квадратного сечения разной толщины.

Ключевые слова: *электронные устройства, магнитное поле, воздействие катушки Гельмгольца, прямоугольное сечение*

Одной из важных составляющих при исследовании современного электронного оборудования является его испытание на возможность работы в присутствии постоянных внешних магнитных полей. Это вызвано крайней сложностью экранирования постоянного магнитного поля и наличием внешнего магнитного поля Земли. Одним из восприимчивых к постоянным магнитным полям элементов современной электроники является катушка индуктивности с ферритовым сердечником. При помещении сердечника в постоянное внешнее магнитное поле может произойти частичное намагничивание, изменяющее дифференциальную (эффективную) магнитную восприимчивость $\frac{dM}{dH}$, что, в свою очередь, приводит к изменению значения индуктивности катушки и, как следствие, параметров исследуемого устройства (в частности, резонансных частот колебательных контуров). Кроме того, нежелательные изменения могут коснуться и полупроводниковых элементов ввиду влияния эффекта Холла.

Для испытания устройств на влияние постоянного магнитного поля без нарушения целостности корпуса необходимо обеспечить создание постоянного магнитного поля в пространстве, достаточном для влияния на весь объём устройства. Обычно для этих целей используются разные схемы создания близкого к однородному магнитного поля, например соленоиды, катушки Максвелла или Гельмгольца. Применение постоянных магнитов ограничивается сложностью управления силой магнитного поля.

Наиболее часто для создания однородного магнитного поля применяются катушки (кольца) Гельмгольца, поскольку они, имея простую конструкцию, создают достаточно однородное поле. Кроме того, они обеспечивают свободный доступ к области, в которой создаётся поле, что бывает необходимо для управления испытываемым прибором. Для расчёта поля, создаваемого катушками (кольцами) Гельмгольца, толщину катушек (колец) считают пренебрежимо малой. В этом случае значение магнитного поля известно и легко вычисляется [1, 2]. Для этого магнитное поле в центре катушек Гельмгольца рассчитывается по формуле для магнитного поля на оси круглого витка с током [3]:

$$H = \frac{1}{4\pi}\frac{2(J\pi R^2)}{(R^2+x^2)^{3/2}},$$

где J — суммарное значение тока, протекающего через виток; R — радиус витка; x — расстояние от витка до точки наблюдения. Обозначая расстояние между катушками как Y, можно найти магнитное поле на оси системы, состоящей из двух витков с током [4]:

$$H = \frac{1}{2}\frac{JR^2}{\left(R^2+\left(x-\frac{Y}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{JR^2}{\left(R^2+\left(x+\frac{Y}{2}\right)^2\right)^{3/2}},$$

где x – расстояние от центра системы до точки наблюдения.

Поле считается наиболее равномерным, когда расстояние Y между катушками равно радиусу катушек. В этом случае вторая производная магнитного поля в центре системы по координате вдоль оси симметрии обращается в нуль.

Постановка задачи. Для создания магнитного поля в достаточно большой области необходимы токи, большие по значению, либо намотка должна содержать большее число витков. (Например, для создания магнитного поля 10 кА/м в объёме 1 м^3 понадобится примерно 500 витков с током 20 А.) При этом не удастся сделать катушки тонкими.

Цель работы — учет профиля катушек (колец) Гельмгольца в расчётах. Кроме того, ставится вопрос об определении оптимального расстояния между катушками (кольцами) Гельмгольца конечного сечения. В процессе работы необходимо было получить модификацию общеизвестной формулы для расчета поля на оси катушек (колец) Гельмгольца в случае применения катушек большого прямоугольного сечения.

Используемые приближения. Будем считать, что катушки, создающие поле, имеют абсолютно точное прямоугольное сечение, ток в катушке протекает равномерно по всему сечению. В действительности ток протекает по отдельным проводникам, что не является его однородным распределением по сечению, однако ввиду равномерного распределения витков по сечению катушки это допущение применимо.

Оптимальным расстоянием между катушками будем считать такое, при котором вторая производная магнитного поля в центре системы по координате вдоль оси симметрии системы обращается в нуль (первая и третья производные, очевидно, также обращаются в нуль из-за зеркальной симметрии системы относительно плоскости, проходящей через центр системы параллельно плоскостям катушек).

Задача будет решаться методом аналитического интегрирования полей, создаваемых отдельными тонкими кольцами, составляющими катушку конечного сечения. В результате будет получена аналитическая формула для поля на оси катушек Гельмгольца конечного сечения. Применяемый метод состоит в разбиении системы токов на отдельные составляющие, расчета магнитных полей от каждой составляющей и последующего суммирования. В основе метода принцип суперпозиции магнитных полей, который непосредственно вытекает из линейности уравнений Максвелла.

Основные расчёты. При использовании катушек ненулевого сечения оптимальное расстояние между ними может отличаться от такового для бесконечно тонких катушек (совпадает с радиусом катушек), поэтому расчёты выполняются для произвольного расстояния между катушками.

Воспользуемся формулой для магнитного поля на оси соленоида [2]:

$$H=\frac{J}{2L}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2),$$

где J – суммарный ток, протекающий через соленоид; L – длина соленоида; φ_1, φ_2 – углы, под которыми видны торцы соленоида в точке наблюдения.

Преобразуем последнюю формулу, исключив углы, и выразим магнитное поле через x – координату точки наблюдения на оси соленоида (начало координат выбрано в центре соленоида):

$$H=\frac{J}{2L}\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{\sqrt{r^2+\left(\frac{L}{2}+x\right)^2}}+\frac{\frac{L}{2}-x}{\sqrt{r^2+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}}\right),$$

где r – радиус соленоида.

Разделив это выражение на толщину обмотки и интегрируя его по r в пределах от внутреннего радиуса r_1 до внешнего r_2:

$$H=\frac{J}{2L(r_2-r_1)}\int\limits_{r_1}^{r_2}\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{\sqrt{r^2+\left(\frac{L}{2}+x\right)^2}}+\frac{\frac{L}{2}-x}{\sqrt{r^2+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}}\right)dr.$$

Интеграл легко берётся:

$$H=\frac{J}{2L(r_2-r_1)}\left(\left(\frac{L}{2}+x\right)\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L}{2}+x\right)^2}}{r_1+\sqrt{r_1^2+\left(\frac{L}{2}+x\right)^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\left(\frac{L}{2}-x\right)\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L}{2}-x\right)^2}}{r_1+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L}{1}-x\right)^2}}\right)\right)\right).$$

Катушки Гельмгольца конечного прямоугольного сечения можно считать двумя соленоидами с толстой обмоткой. Если обозначить за Y расстояние между центрами катушек, то поле на оси системы вычисляется по формуле:

$$H=\frac{J}{2L(r_2-r_1)}\left(\left(\frac{L+Y}{2}+x\right)\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L+Y}{2}+x\right)^2}}{r_1+\sqrt{r_1^2+\left(\frac{L+Y}{2}+x\right)^2}}\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{L-Y}{2}-x\right)\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L-Y}{2}-x\right)^2}}{r_1+\sqrt{r_1^2+\left(\frac{L-Y}{2}-x\right)^2}}\right)+$$
$$+\left(\frac{L-Y}{2}+x\right)\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L-Y}{2}+x\right)^2}}{r_1+\sqrt{r_1^2+\left(\frac{L-Y}{2}+x\right)^2}}\right)+$$
$$\left.+\left(\frac{L+Y}{2}-x\right)\ln\left(\frac{r_2+\sqrt{r_2^2+\left(\frac{L+Y}{2}-x\right)^2}}{r_1+\sqrt{r_1^2+\left(\frac{L+Y}{2}-x\right)^2}}\right)\right).$$

Полученяя формула представляет собой выражение для поля на оси системы, состоящей из двух соленоидов длиной L с внутренними радиусами r_1 и внешними r_2, расстояние между центрами которых составляет Y. Суммарный ток, протекающий по каждой из катушек равен J. Координата x отсчитывается вдоль оси симметрии системы от ее центра.

Выбор оптимальных расстояний между катушками. Ввиду чётности последнего выражения все его нечётные производные в точке $x=0$ равны нулю. Для получения наиболее равномерного поля в этой точке необходимо обращение в нуль второй производной. При фиксированных габаритах этого можно добиться изменением расстояния между катушками. Для катушек квадратного сечения были численно найдены оптимальные расстояния между катушками. Ниже приведены значения отношения оптимального расстояния между катушками к их среднему диаметру в зависимости от отношения стороны квадратного сечения катушек к среднему диаметру:

Отношение стороны квадратного сечения к среднему диаметру катушки $L/(r_1+r_2)=(r_2-r_1)/(r_1+r_2)$	Отношение оптимального расстояния между катушками к среднему диаметру $Y/(r_1+r_2)$
0,00	0,5000
0,05	0,5002
0,10	0,5009
0,20	0,5052

Вывод. Приведенная в статье аналитическая формула для магнитного поля на оси катушек (колец) Гельмгольца с ненулевым сечением показала, что при толщине колец вплоть до 20% их диаметра изменение расстояния между катушками должно меняться примерно на 1%. Таким образом, учёт сечения катушек (колец) Гельмгольца приводит к изменению оптимального расстояния между ними по сравнению с общеизвестными результатами для катушек (колец) Гельмгольца бесконечно малого сечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Robinson P.R.** Improvements to the system of four equiradial coils for producing a uniform magnetic field. – J. Phys. E: Sci. Instrum. 1983, vol. 16, pp. 39—42.

2. **Nieves F.J., Bayyn A., Gascyn F.** Optimization of the magnetic field homogeneity of circular and conical coil pairs. — Rev. Sci. Instrum, 2019, vol. 90, p. 045120.

3. **Савельев И.В.** Курс общей физики. Т. II: Электричество, 2-е изд. М.: Наука, 1982, 496 с.

4. **Киселёв Д.Ф., Жукарев А.С., Иванов С.А. и др.** Электричество и магнетизм. Методика решения задач. М.: Изд. МГУ, 2010, 436 с.

[25.03.2020]

А в т о р ы: ***Харабадзе Давид Эдгарович*** *— кандидат физ.-мат. наук, старший преподаватель Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (МГУ), диссертацию защитил в 2006 г.*

Николадзе Георгий Мевлудиевич *— ведущий электроник кафедры физики МГУ.*

Шевцов Владислав Сергеевич *– младший научный сотрудник МГУ, аспирант ИПУ РАН.*

Поляков Пётр Александрович *– доктор техн. наук, профессор МГУ, защитил диссертацию в 1993 г.*

Electrichestvo, 2020, No. 9, pp. 54—57 ***DOI:10.24160/0013-5380-2020-9-54-57***

The Magnetic Field of Non-Ideal Helmholtz Coils

HARABADZE David E. *(Lomonosov's Moscow State University (MSU), Moscow, Russia) – Senior Instructor of General Physics. Dept., Cand. Sci. (Phys.-Math.)*

NIKOLADZE George M. (*MSU, Moscow, Russia) – Leading Electronics Engineer of General Physics Dept.*

SHEVTSOV Vladislav S. (*MSU, Moscow, Russia) — Jnior Researcher of General Physics Dept.*
POLYAKOV Peter A. *(MSU, Moscow, Russia) — Professor of General Physics. Dept., Dr. Sci. (Phys.-Math.)*

The importance of testing electronic devices for the influence of a constant magnetic field is substantiated. The magnetic field induced by Helmholtz coils having a finite rectangular cross-section is investigated. An analytical expression for the magnetic field at the axis of a finitely thick solenoid and for the magnetic field at the axis of Helmholtz coils with a rectangular cross-section is derived. In the particular case of using Helmholtz coils with a square cross-section, the condition under which the magnetic field second derivative along the system symmetry axis at the system center becomes zero is numerically analyzed, based on which the distance between the coils with a square cross-section at which the field in the system center is the most uniform is found. It is shown that consideration of coil cross-section finite dimensions results in obtaining a somewhat different optimal distance between the coils. A table of optimal distances for Helmholtz coils with a square cross-section having different thickness values has been drawn.

Key words: *Helmholtz coils, rectangular cross section, magnetic field*

REFERENCES

1. **Robinson P.R.** Improvements to the system of four equiradial coils for producing a uniform magnetic field. — J. Phys. E: Sci. Instrum. 1983, vol. 16, pp. 39—42.

2. **Nieves F.J., Bayyn A., Gascyn F.** Optimization of the magnetic field homogeneity of circular and conical coil pairs. — Rev. Sci. Instrum, 2019, vol. 90, p. 045120.

3. **Savel'yev I.V.** *Kurs obshchey fiziki. T. II: Elektrichestvo, 2-e izd.* (General physics course. T. II: Electricity, 2nd ed.). M.: Nauka, 1982, 496 p.

4. **Kiselov D.F., Zhukarev A.S., Ivanov S.A. et al.** *Elektrichestvo i magnetizm. Metodika resheniya zadach* (Electricity and magnetism. Methodology for solving problems). M.: Izd. MGU, 2010, 436 p.

[25.03.2020]