

## Обобщение прямых методов расчета действующих значений тока в цепях с несинусоидальным напряжением

ЗИНОВЬЕВ Г.С.

*Статья посвящена обобщению прямых методов экспресс-анализа класса электрических цепей с несинусоидальными периодическими напряжениями и токами. Анализ проводится на новой концептуальной основе — сразу для действующих значений (квадратичных норм) токов и напряжений, — в отличие от классических методов анализа при мгновенных значениях тока. В результате получены готовые к применению формулы для действующих значений переменных в функции коэффициентов исходного дифференциального уравнения и параметров приложенного напряжения. В качестве таких параметров выступают введенные интегральные (высших порядков) коэффициенты гармоник несинусоидального напряжения, определяемые стандартной операцией по отношению к взвешенным действующим значениям гармоник спектра напряжения. Применительно к устройствам силовой электроники прямой метод дает экспресс-возможность аналитически решать задачи анализа и синтеза параметров устройств и сравнивать устройства между собой в условиях одинаковых допущений при расчетах.*

*Ключевые слова: силовая электроника, электромагнитные процессы, действующие значения тока, несинусоидальные напряжения, методы расчета*

Математический анализ электромагнитных процессов в устройствах силовой электроники сводится в основном к нахождению мгновенных значений переменных и затем к определению их средних и действующих значений для расчета в итоге показателей интенсивности и качества энергетических процессов. Бурное развитие компьютерного моделирования, хотя значительно и ускоряет анализ электромагнитных процессов, однако не дает определенных возможностей, присущих аналитическим методам анализа [1,2]. Во-первых, это проверки на точность моделирования хотя бы в отдельных реперных точках, в которых имеются точные аналитические решения. Во-вторых, возможность аналитического упрощенного экспресс-сравнения устройств силовой электроники с целью выделения их подмножества для более полного анализа его средствами компьютерного моделирования. В-третьих, в целях обучения важно иметь единый аналитический метод анализа базовых схем вентильных преобразователей, приводящий к физически наглядным расчетным формулам для показателей интенсивности и качества электромагнитных переменных.

Первый подход к получению аналитических формул для интегральных значений напряжения и тока связан с использованием стыковки множества решений дифференциальных уравнений по интервалам непрерывности между соседними моментами переключения вентилей, число переключений на периоде может достигать десятков или сотен [3,4].

Решение дифференциальных уравнений требует знания корней характеристического (алгебраического) уравнения, что делает этот подход в общем случае численным.

Второй подход к получению расчетных формул для интегральных значений напряжений и токов связан с использованием спектров всех электромагнитных переменных [5]. Однако большое число переключений на периоде (разрывов непрерывности функций) делает спектры переменных существенно полигармоническими и немонотонными. Вычисление рядов из множества гармоник для нахождения действующих значений переменных делает расчет также по сути численным.

Развиваемый третий подход к построению аналитических формул для действующих значений токов в цепях с периодическими несинусоидальными напряжениями подсказан теорией систем автоматического регулирования. В ней при единичном входном воздействии построен прямой метод расчета (затухающей) интегральной квадратичной ошибки на выходе системы через коэффициенты исходного дифференциального уравнения без их решения [6]. Затем в его рамках получены формулы для расчета действующих значений токов электрических цепей без выписывания решения дифференциального уравнения, но требующие знания корней его характеристического уравнения [3, 4, 7, 8] без ссылок на российские публикации. При этом открывается возможность для аналитического нахождения функций чувствительности [9]. Однако и

здесь в общем случае требуется численное определение корней.

В рамках этого же подхода для электротехнических цепей с вентильными преобразователями были разработаны простые аналитические асимптотически приближенные прямые методы расчета действующих значений периодических несинусоидальных токов при периодических несинусоидальных напряжениях [10–14]. Они отнесены к прямым методам расчета, так как преобразуют дифференциальные уравнения без решения сразу в алгебраические уравнения относительно действующих значений периодических несинусоидальных токов с последующим их решением. Решения зависят только от коэффициентов исходных дифференциальных уравнений и введенных новых коэффициентов гармоник высших порядков приложенного несинусоидального напряжения, не требуя знания корней характеристического уравнения.

Цель данной работы – развитие разработанных ранее прямых приближенных методов расчета действующих значений (квадратичных норм) периодических несинусоидальных токов в линейной цепи при воздействии заданного (спектром или аналитически) периодического несинусоидального напряжения. Допущением при анализе являются требования независимости формы напряжения от тока и стремления к синусоиде  $N$ -кратных интегралов несинусоидальных токов (гипотеза фильтра). Необходимо обобщение расчетных формул для цепи  $n$ -го порядка при любом номере  $N$  уровня асимптотического допущения о степени приближения модели решения с проверкой этой точности моделированием цепей в программе PSIM. Кроме того, требуется установить, какими показателями качества несинусоидального напряжения определяется качество (степень искажения) несинусоидального тока.

Далее представлена методика получения обобщенных формул для действующих значений несинусоидальных токов. Построенному ранее прямому расчету энергетических показателей вентильных преобразователей методом АДУ (Алгебраизация дифференциальных уравнений) [10–12] придадим обобщающий характер с наглядной геометрической интерпретацией. Сначала получим решения для цепей первого, второго и третьего порядка при любом номере уровня асимптотического приближения  $N$  модели, а затем обобщим результат на цепь любого порядка. Отдельно построим решения для действующего значения всего несинусоидального тока (метод АДУ1), а затем и для тока искажения, т.е. действующего значения высших гармоник несинусоидального тока (метод АДУ2). Второй вариант теории значительно упрощает расчетные соотношения, так как при этом исключен вклад от первой гармоники тока. Расчет первой гармоники тока

также унифицирован прямым методом АДУ1 без использования комплексных переменных.

**Система первого порядка в версии АДУ1.** Прямой метод расчета по методу АДУ1 начинается с составления дифференциального уравнения для интересующей переменной. Для последовательной  $RL$ -электрической цепи первого порядка (первая строка таблицы) с приложенной разрывной или непрерывной периодической несинусоидальной ЭДС  $e$  любой заданной формы уравнение имеет вид (порядок производных: слева  $n=1$ , справа  $m=0$ ):

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e. \quad (1)$$

Преобразуем его путем интегрирования в интегральное уравнение установившегося режима (черточка означает операцию взятия неопределенного интеграла). Если используется  $q$ -кратное интегрирование, то к черточке добавляется (кроме  $q=1$ ) индекс  $q$ , определяющий кратность интегрирования:

$$\int \left( L \frac{di}{dt} + Ri \right) dt = \int e dt \quad \text{или} \quad Li + R\bar{i} = \bar{e}. \quad (2)$$

Постоянная интегрирования опущена, так как рассматриваются нормы установившихся электромагнитных процессов, когда свободные составляющие процессов (от постоянных интегрирования) затухли.

Третьим шагом делаем алгебраизацию этого уравнения (по методу АДУ1) путем возведения его в квадрат и усреднения за период  $T$  приложенной ЭДС  $e$ , получаем уже алгебраическое уравнение для норм переменных:

$$L^2 I^2 + R^2 \bar{I}^2 = \bar{E}^2, \quad (3)$$

где  $\bar{E}$  – норма интеграла приложенной ЭДС  $e$ .

Алгебраизация сделана с учетом ранее выведенного производящего соотношения для скалярных произведений периодических переменных [11]:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{x}^{(q_1)} \bar{x}^{(q_2)} dt = \begin{cases} 0 & \text{для } (q_1 + q_2) \text{ нечетное;} \\ \pm \bar{X} \left( \frac{q_1 + q_2}{2} \right)^2 & \text{для } (q_1 + q_2) \text{ четное;} \end{cases} \quad (4)$$

где нормы переменных и их многократных ( $q$ ) интегралов обозначены:

$$(E)^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (e)^2 dt;$$

$$(\bar{E})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{e})^2 dt = \frac{1}{\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{(n)}}{k} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{E_{(1)}}{\omega} \right)^2 \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{E_{(n)}}{kE_{(1)}} \right)^2 \right) = \left( \frac{E_{(1)}}{\omega} \right)^2 (1 + \bar{K}_E^2); \\
(\bar{E})^2 &= (\bar{E}^{(2)})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{e})^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{e}^{(2)})^2 dt = \\
&= \left( \frac{E_{(1)}}{\omega} \right)^2 (1 + \bar{K}_E^2); \\
(\bar{E}^{(q)})^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{e})^2 dt = \left( \frac{E_{(1)}}{\omega} \right)^2 [1 + (\bar{K}_E^{(q)})^2]; \quad (5) \\
\bar{K}_E^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{E_{(n)}}{kE_{(1)}} \right)^2 = \frac{\bar{E}_{(h)}^2}{\bar{E}_{(1)}^2} = \frac{\bar{E}^2 - \bar{E}_{(1)}^2}{\bar{U}_{(1)}^2}; \\
\bar{K}_E^2 &= \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{E_{(k)}}{kE_{(1)}} \right)^2; \\
(\bar{K}_E^{(q)})^2 &= \left( \frac{\bar{E}^{(q)}}{\bar{E}_{(1)}^{(q)}} \right)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{E_{(k)}}{k^q E_{(1)}} \right)^2. \quad (6)
\end{aligned}$$

При этом  $\bar{K}_E^2, \bar{K}_E^2, \dots$  есть квадрат интегрального коэффициента гармоник напряжения (ЭДС) первого (второго, ...,  $q$ ) порядка, определяемый искажением интегрированного напряжения (обработанного как бы идеальным интегрирующим фильтром первого, второго, ...,  $q$  порядка), а  $k$  – номер гармоники. В зарубежной литературе подобный коэффициент первого порядка называют взвешенным коэффициентом гармоник WTHD. Второй путь определения интегральных коэффициентов гармоник приложенного напряжения связан с вычислением или измерением в соответствии с (5) действующих значений  $q$ -кратных интегралов этого напряжения. В обоих случаях используется допущение о независимости приложенного напряжения от тока цепи.

Потери проводимости от высших гармоник тока пропорциональны квадрату токов, т.е. квадрату коэффициента гармоник тока. С учетом обозначения  $A_1^2 = \bar{E}^2 / L^2$ ,  $B_1^2 = \bar{E}^2 / R^2$  преобразуем (3) к стандартной форме уравнения эллипса:

$$\frac{I^2}{A_1^2} + \frac{\bar{I}^2}{B_1^2} = 1. \quad (7)$$

Нормы квадратов переменных  $I^2$  и  $\bar{I}^2$  связаны уравнением эллипса с полуосями  $A_1$  и  $B_1$ . Уравнение (7) содержит две неизвестные  $I^2$  и  $\bar{I}^2$ .

Четвертым шагом доопределим уравнение (7) еще одним уравнением для совместности уже сис-

темы уравнений. Для этого используем допущение (условно названное первым уровнем  $N=1$  допущения модели) о том, что интеграл от тока примерно равен интегралу от первой гармоники тока, так как высшие гармоники в интеграле тока ослабляются каждая в  $k$  раз (как бы фильтруются) по отношению к первой гармонике и ими на этом этапе расчета можно пренебречь (далее будет показано, как их можно учесть точнее при допущениях более высокого уровня, чем первый).

Тогда с учетом полного сопротивления цепи по первой гармонике  $Z_{(1)}$  имеем:

$$\bar{I}^2 \approx \bar{I}_{(1)}^2 = \frac{I_{(1)}^2}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{E_{(1)}^2}{Z_{(1)}^2}. \quad (8)$$

Пятым шагом из решения уравнений (7) и (8) получаем формулу для искомого действующего значения тока в функции параметров цепи и приложенного напряжения (ЭДС) любой формы со своим интегральным коэффициентом гармоник напряжения  $\bar{K}_E$ :

$$I \approx \frac{E_{(1)}}{\omega L} \sqrt{1 - \left( \frac{R}{Z_{(1)}} \bar{K}_E \right)^2} = f(L, R, E_{(1)}, \omega, \bar{K}_E). \quad (9)$$

Действительно, действующее значение тока получено в функции коэффициентов уравнения (1) и параметров приложенного напряжения ( $E_{(1)}, \omega, \bar{K}_E$ ); не требуется знания корня характеристического уравнения.

**Система первого порядка в версии АДУ2.** В линейной системе дифференциальные уравнения для полного тока справедливы и для тока высших гармоник (тока искажения)  $i_h = i_{(1)}$ :

$$L \frac{di_h}{dt} + Ri_h = e_h. \quad (10)$$

Преобразовав это уравнение в интегральное и затем алгебраизировав его, как и выше, получим следующее алгебраическое уравнение для действующих значений тока высших гармоник (тока искажения) и их интеграла в виде

$$L^2 I_h^2 + R^2 \bar{I}_h^2 = \bar{E}_h^2. \quad (11)$$

Опять имеем одно уравнение с двумя неизвестными  $I_h^2$  и  $\bar{I}_h^2$ . Доопределяем второе уравнение, в рамках первого уровня допущения имеем  $\bar{I}_h^2 \approx 0$ , тогда действующее значение тока искажения из (11) равно

$$I_h = \frac{\bar{E}_h}{L} = \frac{E_{(1)}}{\omega L} \bar{K}_E. \quad (12)$$

Эта формула для тока искажения в методе АДУ2 определяется легче и получается значительно проще, чем формула для всего тока (9) в методе АДУ1, так как не содержит вклада от первой гармоники. Показательно, что искажения тока определяются не через коэффициент гармоник напряжения, как принято считать, а через интегральный коэффициент гармоник напряжения первого порядка.

При необходимости действующее значение всего тока

$$I = \sqrt{I_{(1)}^2 + I_h^2}, \quad (13)$$

что с учетом (8) и (12) дает то же значение, что и (9).

Знание действующего значения тока искажения позволяет определить и коэффициент гармоник тока при любом искаженном напряжении. Здесь он в рамках первого уровня допущений (с учетом относительного значения постоянной времени цепи  $\tau_0 = \omega L / R$  или фазы тока  $\varphi_{(1)}$ ) равен:

$$K_{ГТ} = \frac{I_h}{I_{(1)}} = \frac{Z_{(1)}}{\omega L} \bar{K}_E = \frac{\bar{K}_E}{\sin \varphi_{(1)}} = \bar{K}_E \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_0^2}}. \quad (14)$$

Для оценки точности метода расчета в функции параметров цепи (относительного значения постоянной времени цепи  $\tau_0$ ) получим формулы для коэффициентов гармоник и для более высоких уровней допущений. Это позволит определить границы применимости построенного асимптотического прямого метода в зависимости от требуемой точности расчета.

Для этого получим сначала систему  $N$  интегральных уравнений из дифференциального уравнения (10), где  $N$  – принятый уровень допущения (здесь до  $N$ , равного 4):

$$\begin{aligned} Li_h + Ri_h &= \bar{e}_h; \\ L\bar{i}_h + R\bar{i}_h &= \bar{e}_h; \\ L\bar{\bar{i}}_h + R\bar{\bar{i}}_h &= \bar{\bar{e}}_h; \\ L\bar{\bar{\bar{i}}}_h + R\bar{\bar{\bar{i}}}_h &= \bar{\bar{\bar{e}}}_h. \end{aligned} \quad (15)$$

После их алгебраизации получим следующую систему уравнений для нахождения  $I_h^2$ :

$$\begin{aligned} L^2 I_h^2 + R^2 \bar{I}_h^2 &= \bar{E}_h^2; & L^2 \bar{I}_h^2 + R^2 \bar{\bar{I}}_h^2 &= \bar{\bar{E}}_h^2; \\ L^2 \bar{\bar{I}}_h^2 + R^2 \bar{\bar{\bar{I}}}_h^2 &= \bar{\bar{\bar{E}}}_h^2; & L^2 \bar{\bar{\bar{I}}}_h^2 + R^2 \bar{\bar{\bar{\bar{I}}}}_h^2 &= \bar{\bar{\bar{\bar{E}}}}_h^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Полагая  $\bar{\bar{I}}_h^2 = 0$  во втором,  $\bar{\bar{\bar{I}}}_h^2 = 0$  в третьем уравнениях,  $\bar{\bar{\bar{\bar{I}}}}_h^2 = 0$  в четвертом уравнении в системах из двух, трех и четырех уравнений, получим  $I_h^2$  соответственно в рамках второго, третьего, четвертого уровней допущений, а значит и формулы для коэффициентов гармоник тока соответствующего уровня допущения, начиная с  $N=1$  по уравнению (14).

Соответственно, для  $N=2, 3$  и 4:

$$\begin{aligned} K_{ГТ} &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau_0^2}\right) \left(\bar{K}_E^2 - \frac{\bar{\bar{K}}_E^2}{\tau_0^2}\right)}; \\ K_{ГТ} &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau_0^2}\right) \left(\bar{K}_E^2 - \frac{\bar{\bar{K}}_E^2}{\tau_0^2} + \frac{\bar{\bar{\bar{K}}}_E^2}{\tau_0^4}\right)}; \\ K_{ГТ} &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tau_0^2}\right) \left(\bar{K}_E^2 - \frac{\bar{\bar{K}}_E^2}{\tau_0^2} + \frac{\bar{\bar{\bar{K}}}_E^2}{\tau_0^4} - \frac{\bar{\bar{\bar{\bar{K}}}}_E^2}{\tau_0^6}\right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Характерно, что основной вклад в значение коэффициента гармоник тока при различных уровнях допущений вносит первый значащий интегральный коэффициент гармоник напряжения  $\bar{K}_E^2$ , а остальные интегральные коэффициенты напряжения  $\bar{\bar{K}}_E^2, \bar{\bar{\bar{K}}}_E^2, \bar{\bar{\bar{\bar{K}}}}_E^2$  только несколько уточняют результат.

Были построены графики зависимостей этих коэффициентов от параметра нагрузки  $\tau_0$  и показаны результаты точного моделирования цепи в программе PSIM. В качестве входного напряжения взято «очень несинусоидальное» прямоугольное напряжение с импульсами по 120°. Интегральные коэффициенты гармоник этого напряжения равны [14]:  $\bar{K}_Г = 0,046$ ;  $\bar{\bar{K}}_Г = 0,009$ ;  $\bar{\bar{\bar{K}}}_Г = 0,0018$ ;  $\bar{\bar{\bar{\bar{K}}}}_Г = 0,00036$ . Графики зависимостей показали, что погрешность расчета обеспечивается не хуже 5% в диапазоне изменения  $0 < \cos \varphi < 0,9$  для  $N=1,2,3$  и в диапазоне  $0 < \cos \varphi < 0,95$  для  $N=4$ , что приемлемо для большинства инженерных приложений такой формы напряжения. Для практически важной синусоидальной ШИМ с интегральным коэффициентом гармоник напряжения  $\bar{K}_Г = 0,046$  уже при  $N=1$  диапазон изменения  $\cos \varphi_{(1)}$  всегда достаточен для систем с инверторами напряжения, нагруженными асинхронными двигателями. Поэтому здесь и не потребуется анализа для  $N > 1$ .

**Система второго порядка в версии АДУ1.** Электрические цепи первого, второго и третьего порядков, показанные в таблице, являются моделями реальных систем электропитания нагрузки от источников несинусоидального напряжения  $e$  (вентильных преобразователей). Для первой схемы приведено дифференциальное уравнение выходного тока, для второй – выходного напряжения (напряжения конденсатора,  $n=2, m=0$ ), для третьей – входного тока (тока индуктивности  $L_1, n=2, m=1$ ), для четвертой – выходного тока.

Второе дифференциальное уравнение из таблицы преобразуем в алгебраическое уравнение относительно действующих значений (квадратичных норм) выходного напряжения и его интегралов:

$$C^2 U^2 + \left( \frac{1}{R^2} - 2 \frac{C}{L} \right) \bar{U}^2 + \frac{\bar{U}^2}{L^2} = \frac{\bar{E}^2}{L^2}. \quad (18)$$

Эта формула приводится к стандартной форме общего уравнения эллипсоида с выражениями для коэффициентов  $A_2, B_2, C_2$ :

$$\frac{X^2}{A_2^2} + \frac{\bar{X}^2}{B_2^2} + \frac{\bar{\bar{X}}^2}{C_2^2} = 1, \quad (19)$$

где

$$A_2^2 = \left( \frac{C}{L} \bar{E} \right)^2; \quad B_2^2 = \left( \frac{\bar{E}}{L} \right)^2 \frac{1}{\left( \frac{1}{R^2} - 2 \frac{C}{L} \right)}; \quad C_2^2 = \bar{E}^2. \quad (20)$$

Нормы переменных связаны уравнением эллипсоида с полуосями  $A_2, B_2$  и  $C_2$ . Нетрудно убедиться, что при уровнях допущений  $N$  выше единицы порядок эллипсоида с переменными увеличивается до размерности  $n+N$ . Если развернуть полу-

ченную общую формулу (19) для высших гармоник (метод АДУ2) и для первой гармоники (метод АДУ1), то получим коэффициент гармоник выходного напряжения схемы:

$$K_{\Gamma} = \frac{U_h}{U_{(1)}} = \bar{\bar{K}}_E \sqrt{1 + \left( \frac{1}{R^*} \right)^2 - 2(\omega^*)^2 + (\omega^*)^4}, \quad (21)$$

$$\text{где } (\omega^*)^2 = \frac{1}{\omega^2 LC}; \quad R^* = \omega CR.$$

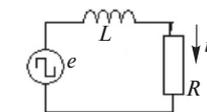
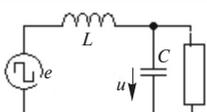
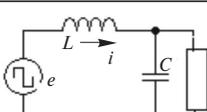
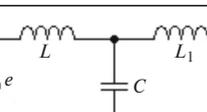
Расчет по этой формуле коэффициента гармоник выходного напряжения при изменении  $1 < R^* < 10, 2 < \omega^* < 3$  и том же «квазипрямоугольном» напряжении с  $\bar{\bar{K}}_E = 0,009$  дает на краю диапазона погрешность не более 10%, а с синусоидальным ШИМ напряжением значительно меньше.

Аналогичные операции для второго уравнения таблицы даст коэффициент гармоник входного тока:

$$K_{\Gamma T} = \frac{I_h}{I_{(1)}} = \frac{Z_{(1)}}{\omega L} \sqrt{\bar{\bar{K}}_E^2 \left( 1 + \frac{1}{\omega RC} \right)^2 \bar{\bar{K}}_E^2}. \quad (22)$$

Здесь  $Z_{(1)}$  – модуль полного входного сопротивления цепи по первой гармонике, определяемый по полученной методом АДУ1 общей формуле (29), приведенной ниже.

Необходимо отметить, что формула (22) с учетом (6) означает разложение действующего значения напряжения искажения выхода в ряд по действующим значениям интегралов напряжения искажения входа (здесь это  $\bar{E}_{(h)}, \bar{E}_{(h)}^{(2)}$ ). С увеличением номера уровня допущения число членов ряда по интегралам напряжения искажения входа  $\bar{E}_{(h)}^{(q)}$  будет увеличиваться, как это видно из (17) для раз-

	$L \frac{di}{dt} + Ri = e$	$n=1, m=0$
	$C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = \frac{e}{L}$	$n=2, m=0$
	$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{e}{RC} + \frac{de}{dt}$	$n=2, m=1$
	$L \frac{d^3 i}{dt^3} + R \frac{d^2 i}{dt^2} + \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{CL_1} \right) \frac{di}{dt} + \frac{R}{L_1 C} i = \frac{e}{L_1 C}$	$n=3, m=0$

ных значений уровней допущений в системе первого порядка.

Примечательно, что коэффициент гармоник выходного напряжения цепи по (21) определяется интегральным коэффициентом гармоник приложенного напряжения второго порядка, а коэффициент гармоник входного тока цепи по (22) определяется в основном интегральным коэффициентом гармоник приложенного напряжения первого порядка. Это обусловлено тем, что разница высших порядков  $(n-m)$  левых и правых частей дифференциального уравнения второй строки таблицы равна двум, а дифференциального уравнения третьей строки – единице. В общем случае это будет интегральный коэффициент гармоник порядка, равный разности порядков левой и правой частей уравнения.

**Система третьего порядка в версии АДУ2.** Дифференциальное уравнение для высших гармоник выходного тока цепи, например инвертора напряжения с выходным фильтром третьего порядка, имеет вид (коэффициент при старшей производной нормирован единицей,  $n=3, m=0$ ):

$$\frac{d^3 i_h}{dt^3} + \frac{R}{L} \frac{d^2 i_h}{dt^2} + \left( \frac{1}{LC} + \frac{1}{CL_1} \right) \frac{d i_h}{dt} + \frac{R}{L_1 LC} i_h = \frac{e_h}{L_1 LC}.$$

Преобразование его в интегральное уравнение установившегося режима дает:

$$i_h + \frac{R}{L} i_h + \left( \frac{1}{LC} + \frac{1}{CL_1} \right) \bar{i}_h + \frac{R}{CL_1} \bar{i}_h = \frac{\bar{e}_h}{C L L_1}. \quad (23)$$

В рамках первого уровня допущения  $\bar{i}_h \approx 0$  после алгебраизации получается формула для действующего значения высших гармоник выходного тока:

$$I_h = \frac{\bar{E}}{C L L_1} = \frac{E_{(1)}}{\omega^3 C L L_1} \bar{K}_E. \quad (24)$$

Показательность аналитического выражения для тока искажения в том, что он зависит прямо пропорционально от интегрального третьего порядка коэффициента гармоник приложенного напряжения (опять не от коэффициента гармоник приложенного напряжения) и обратно пропорционально от произведения значений реактивных элементов цепи. Это дает разработчику инверторной системы определенную свободу в выборе параметров отдельных реактивных элементов. Кроме того, оптимизацию способа ШИМ в инверторе напряжения с фильтром третьего порядка необходимо делать по интегральному третьему порядку коэффициенту гармоник его напряжения, а не по коэффициенту гармоник напряжения, как это принято сейчас.

Действующее значение первой гармоники выходного тока (третье дифференциальное уравнение таблицы) получается из общего решения, приведенного ниже, а по нему определяется и коэффициент гармоник тока.

**Система  $n$ -го порядка в версии АДУ1.** Для обобщения метода сделаем аналогичные преобразования для системы  $n$ -го порядка. Первым шагом получаем дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка для искомой переменной  $x$ :

$$\sum_{i=0}^n a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} x}{dt^{(n-1)}} = \sum_{j=0}^m a_{m-j} \frac{d^{(m-j)} e}{dt^{(m-j)}}. \quad (25)$$

Вторым шагом преобразуем его в интегральное уравнение установившегося режима:

$$\sum_{i=0}^n a_{n-1} \bar{x}^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_{m-j} \bar{e}^{(j)}.$$

Третьим шагом алгебраизируем его по методу АДУ1, т.е. возведем в квадрат и усредним за период. Тогда алгебраическое уравнение для норм переменных при уровне допущения  $N-1$  примет вид с учетом  $\bar{K}_E^{(n-m+j)}$  по (6):

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_{(n-i)c}^2 (\bar{X}^{(i)})^2 &= \sum_{j=0}^m b_{(m-j)c}^2 (\bar{E}^{(n-m+j)})^2 = \\ &= \frac{E_{(1)}^2}{\omega^{2(n-m+j)}} \sum_{j=0}^m b_{(m-j)c}^2 (\bar{K}_E^{(n-m+j)})^2 = P_n^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Корректированные коэффициенты  $a_{(n-i)c}^2$ ,  $b_{(m-j)c}^2$  получаются при алгебраизации общего уравнения суммированием множителей при одинаковых степенях интегралов  $(\bar{X}^{(i)})^2$ ,  $(\bar{E}^{(n-m+j)})^2$  соответственно [12]. Уравнение (26) опять представляет разложение в ряд по действующим значениям интегралов приложенного напряжения, определение свойств которого требует отдельного исследования.

Преобразуем его к другой стандартной форме, а именно, к форме уравнения эллипсоида  $(n+1)$ -порядка с полуосями  $(\bar{X}^{(i)})^2$ :

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_{(n-i)c}^2}{P_n^2} (\bar{X}^{(i)})^2 = 1. \quad (27)$$

Эллипсоид расположен в пространстве  $(n+1)$ -порядка, трудно представимого на плоскости листа. В дальнейшем предполагается использовать свойства эллипсоидов для уменьшения размера множества искомых переменных.

На четвертом шаге получение решения для любой нормы переменных левой части дифференциального уравнения сводится к доопределению полученного алгебраического уравнения (27) новыми  $n-1$  алгебраическими уравнениями, чтобы сделать систему уравнений совместной. В качестве доопределений взяты уравнения первого уровня допущения в виде алгебраических соотношений между нормами первых гармоник искомого переменных для  $i \neq n$ :

$$(\bar{X}^{(i)})^2; (\bar{X}_{(1)}^{(i)})^2 = \frac{X_{(1)}^2}{\omega^{2(i)}}. \quad (28)$$

Это допущение основано на том, что интегрирование несинусоидальных функций уменьшает содержание высших гармоник по отношению к первой в  $k$  раз, т.е. приводит как бы к фильтрации несинусоидальных функций (гипотеза фильтра). Это позволяет заменять их соответствующими синусоидальными функциями, так как для  $N=1-\bar{i}_{\text{ВГ}}$ ;  $0, \bar{i}_{\text{ВГ}}; 0, \bar{i}_{\text{ВГ}}=0\dots$ , для  $N=2-\bar{i}_{\text{ВГ}}$ ;  $0, \bar{i}_{\text{ВГ}}=0\dots$  При повышении номера уровня допущения  $N$  замена становится все более точной.

Первая гармоника искомого переменного  $X_{(1)}$  определяется через модуль комплексного сопротивления цепи через коэффициенты исходного дифференциального уравнения (25) также прямым методом АДУ(1) [12]:

$$X_{(1)} = \frac{E_{(1)}}{Z_{(1)}}; Z_{(1)}^2 = \frac{E_{(1)}^2}{X_{(1)}^2} = \sum_{i=0}^n \frac{a_{n-l,k}^2}{\omega^{2l}} / \sum_{l=0}^m \frac{b_{m-l,k}^2}{\omega^{2l}}. \quad (29)$$

В итоге построено расчетное соотношение, состоящее из конечного числа элементарных арифметических операций и не требующее знания корней характеристического уравнения. Несинусоидальное приложенное напряжение характеризуется конечным набором введенных интегральных коэффициентов гармоник высших порядков.

При необходимости аналогичным способом построится решение для второго  $N-2$  и последующих уровней допущений при анализе модели.

**Выводы.** 1. В результате обобщения процедуры асимптотически приближенных прямых методов расчета действующих значений несинусоидальных периодических токов в линейных цепях с несинусоидальным напряжением получены обобщенные алгебраические уравнения без решения дифференциальных уравнений и знания корней характеристического уравнения. Обобщенные алгебраические уравнения имеют наглядную геометрическую интерпретацию в виде эллипсоидов  $(n+N)$  порядка,

где  $N$  – номер уровня допущения при расчете, определяющий его точность.

2. Полученные для пользователей готовые конечные расчетные соотношения для линейной электрической цепи любого порядка определяют действующие значения несинусоидальных токов прямо через коэффициенты исходных дифференциальных уравнений электрической цепи и введенные новые интегральные  $n$ -го порядка коэффициенты гармоник приложенного периодического напряжения любой заданной формы.

3. Степень искажения тока несинусоидальным напряжением в линейной цепи определяется интегральным коэффициентом гармоник напряжения порядка, равного разности порядков правой и левой частей дифференциального уравнения цепи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демирчян К.С., Бутырин П.А. Моделирование и машинный расчет электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1988, 335с.
2. Герман-Галкин С.Г. Силовая электроника. Лабораторные работы на ПК. СПб.: КОРОНА Принт, 2002, 304 с.
3. Бутырин П.А., Жохова М.П. Установившиеся составляющие решений неканонических уравнений состояния электрических цепей. – Электричество, 2001, № 3, с. 33–37.
4. Бутырин П.А., Зайцева Н.Н. Аналитическое определение показателей интенсивности и качества электромагнитных процессов в линейных электрических цепях. – Изв. РАН. Энергетика, 2010, № 6,
5. Такеути Т. Теория и применение вентильных цепей для регулирования двигателей. Л.: Энергия, 1973, 248 с.
6. Джеймс Х., Николс Н., Филипс Р. Теория следящих систем. М: Иностранная литература, 1953.
7. Руденко В.С., Жуйков В.Я., Коротеев И.А. Расчет устройств преобразовательной техники. Киев: Вища школа, 1978, 424 с.
8. Blagouchine I.V., Moreau Eric. Analytic Method for the Computation of the total Harmonic Distortion by the Cauchy Method of Residues. – IEEE Transactions on communications, 2011, vol. 59, No. 9, pp. 2478–2491.
9. Бутырин П.А., Зайцева Н.Н. Аналитическое определение чувствительности показателей качества электроэнергии к изменению параметров в линейных электрических цепях. – Изв. РАН. Энергетика, 2014, № 2.
10. Зиновьев Г.С. Метод прямого расчета действующего значения тока в цепи с несинусоидальным напряжением. – Теоретическая электротехника. Львов, 1987, № 43, с. 98–103.
11. Зиновьев Г.С. Прямой метод расчета мощностей в цепях с вентильными преобразователями. – Электричество, 1989, № 6, с. 70–75.
12. Зиновьев Г.С. Прямые методы расчета энергетических показателей вентильных преобразователей. Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1990, 220 с.
13. Zinoviev G.S. Concept of definition of electromagnetic compatibility factors of power converters with supply line and load. – Proc. Conf. PEMS'96. Hungary, Budapest, 1996, pp. 2.201–2.204.
14. Зиновьев Г.С. Основы силовой электроники, 5-е изд. М.: Юрайт, 2009, 672с.

[15.10.2018]

*А в т о р ы: Зиновьев Геннадий Степанович окончил факультет электронной техники Новосибирского государственного технического университета*

(НГТУ). В 1988 г. защитил докторскую диссертацию «Преобразователи частоты на базе инверторов напряжения для частотного асинхронного электропри-

вода (методы повышения энергетической эффективности)». Профессор кафедры электроники и электротехники НГТУ.

Электричество, 2019, № 2, с. 40–47

DOI:10.24160/0013-5380-2019-40-47

## Generalizing the Direct Analysis Methods of Effective Current Values in Circuits with Non-Sinusoidal Voltage

ZINOV'YEV Gennady S. (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia) – Professor, Dr. Sci. (Eng.)

The article deals with generalizing the direct express analysis methods for the class of electric circuit with non-sinusoidal periodic voltages and currents. The analysis is carried out on a new conceptual basis—directly for the effective values (quadratic norms) of currents and voltages unlike the classical analysis methods with instantaneous values of current. As a result, ready-for-use formulas for the effective values of variables as a function of coefficients of the initial differential equation and the applied voltage parameters are obtained. The introduced integral (high-order) harmonic coefficients of a non-sinusoidal voltage determined from the standard operation with respect to weighted effective values of voltage spectrum harmonic components are used as such parameters. Application of the proposed direct method to power electronic devices provides fast analytical tools for solving problems concerned with analysis and synthesis of devices with the possibility to compare them with each other under the conditions of identical assumptions in calculations.

Key words: power electronics, electromagnetic processes, effective current values, non-sinusoidal voltages, calculation methods

### REFERENCES

1. Demirchyan K.S., Butyrin P.A. *Modelirovaniye i mashinnyi raschet elektricheskikh tsepei* (Modeling and computer-aided analysis of electrical circuits). Moscow, Vysshaya shkola, 1988, 335 p.
2. German-Galkin S.G. *Silovaya elektronika. Laboratornye raboty na PK* (Power electronics. Laboratory class works on a PC). St. Petersburg, KORONA Print, 2002, 304 p.
3. Butyrin P.A., Zhokhova M.P. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2001, No. 3, pp. 33–37.
4. Butyrin P.A., Zaitseva N.N. *Izv. RAN. Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2010, No. 6,
5. Takeuti T. *Teoriya i primeneniye ventil'nykh tsepei dlya regulirovaniya dvigatelei* (Theory and application of valve circuits for control of motors). Leningrad, Energiya, 1973, 248 p.
6. Dzheims Kh., Nikols N., Filips R. *Teoriya sledyashchikh sistem* (Theory of servomechanisms). Moscow, Inostrannaya literatura, 1953.
7. Rudenko V.S., Zhuikov V.Ya., Koroteyev I.A. *Raschet ustroystv preobrazovatel'noi tekhniki* (Design and analysis of converter devices). Kiyev, Vishcha shkola, 1978, 424 p.
8. Blagouchine I.V., Moreau Eric. Analytic Method for the Computation of the total Harmonic Distortion by the Cauchy

Method of Residues. – IEEE Transactions on communications, 2011, vol. 59, No. 9, pp.2478–2491.

9. Butyrin P.A., Zaitseva N.N. *Izv. RAN. Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2014, No. 2.
10. Zinov'yev G.S. *Teoreticheskaya elektrotehnika – in Russ. (Theoretical Electrical Engineering)*, 1987, No. 43, pp. 98–103 (L'vov).
11. Zinov'yev G.S. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1989, No. 6, pp. 70–75.
12. Zinov'yev G.S. *Pryamye metody rascheta energeticheskikh pokazatelei ventil'nykh preobrazovatelei* (Direct methods for calculating power performance indicators of valve converters). Publ. of Novosibirsk State University, 1990, 220 p.
13. Zinoviev G.S. Concept of definition of electromagnetic compatibility factors of power converters with supply line and load. – Proc. Conf. PEMC'96. Hungary, Budapest, 1996, pp. 2.201–2.204.
14. Zinov'yev G.S. *Osnovy silovoi elektroniki, 5-ye izd.* (Fundamentals of power electronics, 5th edit.). Moscow, Yurait, 2009, 672 p.

[15.10.2018]