

# Индуктивности и силы сжатия в двухслойных катушках

ЦИЦИКЯН Г.Н., БОБРОВНИКОВ П.В.

Филиал «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «КГНЦ», Санкт-Петербург, Россия

Рассмотрены расчётные выражения для коэффициентов самоиндукции двухслойных и однослойных катушек и проведены соответствующие сопоставления. Даны примеры по расчёту коэффициентов индукции для известных конструктивных исполнений катушек. Представлено выражение для расчёта сил осевого сжатия в двухслойных катушках. Проведён расчёт сил осевого сжатия в катушках в составе трёхфазных нагрузочных устройств, предназначенных для испытаний генераторных агрегатов автономных электростанций. Полученные выражения для расчета индуктивностей и сил осевого сжатия двухслойных катушек достаточно лаконичны и могут быть рекомендованы для практического использования. Эти выражения включают только конструктивные параметры катушек: число витков в слоях, радиусы слоев, шаги намоток, длина слоев. Статья проиллюстрирована конкретными примерами расчета индуктивности и сил сжатия катушек.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** однослойные и двухслойные соленоиды, коэффициент самоиндукции, силы осевого сжатия

Вопросам, относящимся к оценке коэффициентов само- и взаимной индукции для однослойных соленоидов, посвящено большое число работ, что подтверждается выборочным перечнем [1–8] пристатейной литературы. Вместе с тем для индуктивности двухслойного соленоида с одинаковым числом витков в слоях в работе [9] приведено расчётное выражение, которое в обозначениях рис.1 может быть записано в виде:

$$L_{дв} = \frac{\pi \mu_0 r_0^3 4w^2}{r_0 l_w + 0,9r_0^2 + 0,32l_w t + 0,84r_0 t}, \quad (1)$$

где  $w$  – число витков в слое;

$$r_0 \approx (R_1 + R_2) / 2; \quad l_w = S_w (w - 1); \quad t \approx (R_1 - R_2) / 2, \quad (2)$$

здесь  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы слоёв;  $S_w$  – шаг намотки;  $l_w$  – длина слоя.

Разделив на  $r_0$  числитель и знаменатель выражения (1) с последующей подстановкой  $r_0$  в соответствии с (2) будем иметь:

$$L_{дв} = \frac{\pi \mu_0 (R_1 + R_2)^2 w^2}{l_w \left( 1 + 0,32 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) + 0,87R_1 + 0,03R_2}. \quad (3)$$

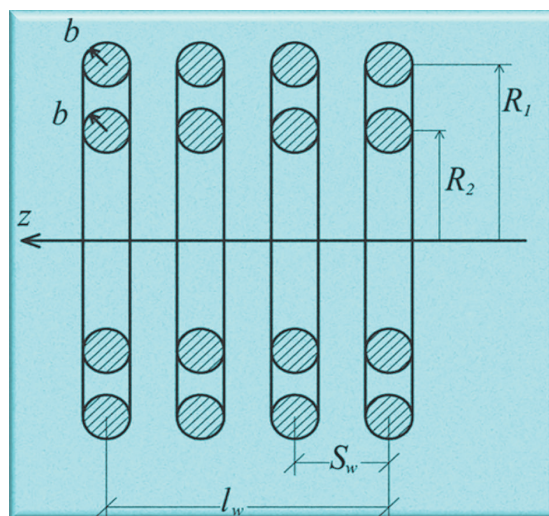
Тогда при  $R_1 = 0,16$  м,  $R_2 = 0,14$  м, т.е. для выбранных значений радиусов внешнего и внутреннего слоёв, шаге намотки  $S_w = 0,008$  м с  $w = 40$  и, соответственно, при  $l_w = 39 \cdot 0,008 = 0,312$  м будем иметь:

$$L_{дв} = \frac{\pi \mu_0 \cdot 0,09 \cdot 1600}{0,312 \left( 1 + 0,32 \frac{0,02}{0,3} \right) + 0,87 \cdot 0,16 + 0,14 \cdot 0,03} =$$

$$= \frac{0,5685 \cdot 10^{-3}}{0,3187 + 0,1392 + 0,0042} \approx 1,2302 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

С целью сравнения приведём выражение для расчёта индуктивности однослойной катушки с числом витков  $w = 40$  с радиусом, равным среднему радиусу двухслойной катушки, т.е. 0,15 м. Выражение для однослойной катушки, данное в [10, 11], имеет вид:

$$L = \frac{\mu_0 w^2 R}{2} \frac{\pi}{l_w / 2R + 0,4244}. \quad (4)$$



**Рис. 1.** Двухслойная катушка с одинаковым числом витков  $w$  в слоях с радиусами  $R_2$  и  $R_1$ ;  $l_w$  – длина слоёв, принятая одинаковой и равная  $S_w(w - 1)$ , где  $S_w$  – шаг намотки

**Fig. 1.** A two-layer coil with the same number of turns  $w$  in layers with radii  $R_2$  and  $R_1$ ;  $l_w$  –  $w$  is the length of the layers assumed to be the same and equal to  $S_w(w - 1)$ , where  $S_w$  – is the winding step

Подстановка величин  $\mu_0$  и значений  $w = 40$ ,  $l_w = 0,312$  м,  $R = R_{cp} = 0,15$  м в (4) приводит к следующему значению:  $L = 0,3235 \cdot 10^{-3}$  Гн, которое отличается практически в 4 раза, что продиктовано различием в числе слоев при одинаковом числе витков в слое.

При  $w = 50$ , но при сохранении радиусов внутреннего и внешнего слоев, а также шага намотки, при котором  $l_w = 49,008$  м = 0,392 м, получаем по формуле (3) следующую численную оценку:  $L_{дв} \approx 1,633 \cdot 10^{-3}$  Гн. Вместе с тем подстановкой  $w = 50, l = 0,392$  м,  $R = 0,15$  м в формулу (4) для однослойного соленоида со средним радиусом 0,15 м имеем:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50^2 \cdot 0,15}{2} \frac{\pi}{\frac{0,392}{0,3} + 0,4244} = 0,4276 \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$$

и различие в оценках практически в 4 раза, которое должно иметь место при сопоставлении двухслойной и однослойной катушек. Заметим, что формула (4) известна еще по следующей модификации для длинного соленоида, когда  $l_w \geq 2R$ :

$$L = \frac{\mu_0 w^2 R}{2} \frac{\pi}{\frac{l_w}{2R} + 0,45}, \quad (5)$$

и тогда с подстановкой значений  $w = 50$ ,  $R = 0,15$  м,  $l_w = 0,392$  м получим:

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50^2 \cdot 0,15}{2} \frac{\pi}{0,392/0,3 + 0,45} = 0,421 \cdot 10^{-3} \text{ Гн,}$$

и четырехкратное значение получаемой оценки в  $1,684 \cdot 10^{-3}$  Гн близко к значению, приведенному ранее.

В [3] дано выражение для индуктивности однослойного соленоида, пригодное как для длинного, так и для короткого соленоида. Общее выражение при этом может быть записано в виде:

$$L = \mu_0 w^2 R \left[ \ln \left( 1 + \frac{\pi R}{l_w} \right) + \frac{1}{2,3004 + 1,7185 \frac{l_w}{R} + 0,4409 \left( \frac{l_w}{R} \right)^2} - \frac{0,47}{\left( 0,755 + \frac{2R}{l_w} \right)^{1,44}} \right]. \quad (6)$$

Подстановка значений  $R = 0,15$  м,  $w = 50$ ,  $l_w = 0,392$  м в (6) приводит к индуктивности  $L = 0,4202 \cdot 10^{-3}$  Гн, что практически не отличается от значения, рассчитанного по формуле (5). Сопоставим результаты вычислений по формулам (3) и (6), но при  $w = 20$  и  $l_w = 19,008$  м = 0,152 м, сохраняя значения  $R_1 = 0,16$  м и  $R_2 = 0,14$  м для формулы (3) и  $R = (R_1 + R_2)/2 = 0,15$  м для фор-

мулы (6). По формуле (3) для  $L_{дв}$  будем иметь следующую оценку при подстановке  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м;  $L_{дв} = 0,4759 \cdot 10^{-3}$  Гн, тогда как по формуле (6) с подстановкой  $l_w = 0,152$  м,  $R = R_{cp} = 0,15$  м и  $w = 20$  находим:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 0,15 \left\{ \ln \left( 1 + \frac{\pi \cdot 0,15}{0,152} \right) + \left[ \frac{2,3004 + 1,7185 \frac{0,152}{0,15} + 0,4409 \left( \frac{0,152}{0,15} \right)^2}{0,47} - \frac{1}{\left( 0,755 + \frac{0,3}{0,152} \right)^{1,44}} \right]^{-1} \right\} = 0,1236 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

С умножением полученного результата на 4 для сопоставления с  $L_{дв}$  получим  $0,4944 \cdot 10^{-3}$ , и результаты расчётов по формулам (3) и (6) несущественно отличаются друг от друга. Заметим, что в работе [12] для двухслойного соленоида с количеством витков, равным 50, с длиной слоя  $l_w = 0,392$  м и радиусами  $R_2 = 0,14$  м,  $R_1 = 0,16$  м была получена оценка для  $L_{дв}$  на основании рекомендаций, данных в [13], равная  $1,55 \cdot 10^{-3}$  Гн.

Перейдём теперь к вопросу о сжимающих электродинамических силах для двухслойной катушки, используя формулу (4.16) в [14]:

$$f_{сж} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L_{дв}}{\partial l_w}. \quad (7)$$

Подставляя выражение (3) в (7), имеем:

$$f_{сж,дв} = -\frac{\pi}{2} \mu_0 i^2 w^2 (R_1 + R_2)^2 \left( 1 + 0,32 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) \times \left[ l_w \left( 1 + 0,32 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) + 0,87 R_1 + 0,03 R_2 \right]^{-2}. \quad (8)$$

Здесь  $k$  и  $E$  – полные эллиптические интегралы первого и второго порядка.

Пусть теперь ток  $i$  изменится по синусоидальному закону, т.е.  $i^2 = I_m^2 \sin^2 \omega t = I^2 (1 - \cos 2\omega t)$ . Тогда в среднем по времени сила  $F_{сж}$  будет определяться в соответствии с (8) с заменой  $i^2$  на квадрат действующего значения тока, т.е. на  $I^2$ . Подстановкой  $w = 50$ ,  $R_1 = 0,16$  м,  $R_2 = 0,14$  м,  $l_w = 0,392$  м для силы  $F_{сж}$  получим:

$$F_{сж,дв} = -\frac{\pi}{2} 4\pi 10^{-7} I^2 \cdot 2500 \cdot 0,3^2 \left( 1 + 0,32 \frac{0,02}{0,3} \right) \times \left[ 0,392 \left( 1 + 0,32 \frac{0,02}{0,3} \right) + 0,87 \cdot 0,16 + 0,03 \cdot 0,14 \right]^{-2} = -2\pi^2 \cdot 10^{-7} I^2 2500 \cdot 0,09 \cdot 1,0213 \cdot 3,3822 = 1,5341 \cdot 10^{-3} \cdot I^2.$$

Выбирая в виде примера действующее значение тока  $I = 400$  А, будем иметь  $F_{сж,дв} = 245,456$  Н или

25,036 кгс. Заметим, что (как показано в [12]) среднюю во времени величину силы сжатия соленоида с числом витков  $w$  и с действующим значением тока  $I$  можно рассчитать в соответствии с выражением

$$F_{\text{ск}} = -\mu_0 I^2 w^2 C(k^2),$$

в котором  $C(k^2)$  равно:

$$C(k^2) = \frac{1}{6} \frac{1}{(1-k^2)^{3/2}} \left[ (1+k^2)E - (1-k^2)K - 2(k^2)^{3/2} \right],$$

где  $k^2 = \frac{1}{\left(\frac{l}{2R}\right)^2 + 1}$ ;  $l$  – длина соленоида;  $R$  – его ради-

ус; Здесь  $K$  и  $E$  – эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

Подставляя вместо  $l$  величину  $l_w = 0,392$  м и  $R = 0,15$  м, имеем для  $k^2$  значение, близкое к 0,37, что позволяет воспользоваться табличными значениями для  $C(k^2)$  в диапазоне изменения  $k^2$  от 0,35 до 0,4. В этом диапазоне  $C(k^2)$  изменяется от 0,119 до 0,139 [12], и при достижении значения  $k^2 = 0,37$  величину  $C(k^2)$  можно принять равной 0,127. Тогда  $F_{\text{ск}} = -4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 2 \cdot 2500 \cdot 0,127 \approx -63,84$  Н, четырёхкратное значение этой величины составляет 255,35 Н или 26,04 кгс, весьма близкое к значению 25,036 кгс, полученному ранее.

Приводимая оценка должна быть принята во внимание при конструктивном исполнении двухслойной катушки трёхфазного нагрузочного устройства с водяным охлаждением, входящей в состав трёхфазной ступени нагрузки этого устройства, мощность которой равна  $\sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\text{ст}} \cos\varphi$ , где  $U_{\text{л}}$  – линейное напряжение;  $I_{\text{ст}}$  – действующее значение тока ступени;  $\cos\varphi$  – коэффициент мощности, принимаемый не менее 0,8.

Тогда при  $U_{\text{л}} = 380$  В,  $\cos\varphi = 0,8$  и токе  $I_{\text{ст}} = 400$  А мощность ступени оказывается равной 210,62 кВт и выбор значения тока в 400 А вполне согласуется с мощностью ступени четырёхступенчатого нагрузочного устройства с номинальной мощностью 1000 кВт, используемого и в настоящее время для проведения испытаний генераторных агрегатов автономных электростанций. Отсюда вывод, что конструктивное исполнение двухслойной катушки в составе нагрузочного устройства с числом витков в слое от 40, 50 и выше должно выдерживать стягивающее усилие до нескольких десятков килограмм при токах порядка нескольких сот ампер. Этим, в частности, объясняются специфические особенности конструктивного исполнения катушек, витки которых должны быть проложены в пазах прочного твёрдого диэлектрического каркаса, способного выдерживать усилия сжатия при токах в несколько сот ампер.

**Выводы.** Силы сжатия в двухслойных катушках при токах в несколько сот ампер могут достигать нескольких десятков кгс, которые должны быть приняты во внимание при выборе конструкций катушек. Результаты расчёта индуктивностей двухслойных катушек вполне сопоставимы с результатами расчётов для однослойных катушек с тем же количеством витков в слое и при относительной близости радиусов слоёв, принимая во внимание удвоенное число витков в двухслойной катушке и, следовательно, четырёхкратную разницу в оценках. Выражения (3) и (8) для индуктивности и сил сжатия в двухслойной катушке можно рекомендовать для практического использования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korovkin N.V., Vu Q.S., Yazenin R.A. A Method for Minimization of Unbalanced Mode in Three-Phase Power Systems. – 2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EIconRusNW), 2016, DOI:10.1109/EIconRusNW.2016.7448257.
2. Korovkin N.V., Chechurin V.L., Hayakawa M. Inverse Problems in Electric Circuits and Electromagnetics. Springer Science, 2007, 331 p.
3. Knight D.W. An Introduction to the art of Solenoid Inductance and Impedance Calculation [Электрон. ресурс], URL: <https://www.g3ynh.info/zdocs/magnetics/SolenoidZ.pdf> (дата обращения 15.12.2021).
4. Thompson M.T. Inductance Calculations Techniques – Part II: Approximations and Handbook Methods, Power Control and Intelligent Motion, 1999, 11 с.
5. Ramo S., Winnery J.R., Van Duzer T. Fields and Waves in Communication Electronics. Hoboken: Wiley, 1994, 859 p.
6. De Queiroz A.C.M. Mutual Inductance and Inductance Calculations by Maxwell's Method [Электрон. ресурс], URL: [https://www.Researchgate.net/publication/266891743\\_Mutual\\_Inductance\\_and\\_Inductance\\_Calculations\\_by\\_Maxwell's\\_Method](https://www.Researchgate.net/publication/266891743_Mutual_Inductance_and_Inductance_Calculations_by_Maxwell's_Method) (дата обращения 15.12.2021).
7. Numerical Methods for Inductance Calculation. Robert Weaver [Электрон. ресурс], URL: <http://electronbunker.ca/eb/CalcMethods.html> (дата обращения 15.12.2021).
8. Liu X., Hui S.Y. Optimal Design of a Hybrid Winding Structure for Planar Contactless Battery Charging Platform. – IEEE Transactions on Power Electronics, 2008, vol. 23 No. 1, pp. 455–463.
9. Lane J.E., et al. Magnetic Field, Force and Inductance Computations for an Axially Symmetric Solenoid. NASA/TM-2013-217918, 2001.
10. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Оценка сжимающих сил, действующих на тонкослойные катушки (соленоиды) с током. – Известия РАН. Энергетика, 2018, № 8, с. 26–31.
11. Wheeler H.A. Inductance Formulas for Circular and Square Coils. – Proc. of the IEEE Letters, 1982, vol.70, No.12, pp. 1449–1451.
12. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Расчёт индуктивности однослойного и двухслойного соленоида с учётом особенностей практического применения. – Электричество, 2019, № 10, с. 48–53.
13. Калантаров П.Л., Пейтлин Л.Л. Расчёт индуктивностей. Справочная книга. Л: Энергоатомиздат, 1986, 488 с.
14. Цицикян Г.Н., Бобровников П.В., Антипов М.Ю. Руководство по расчёту индуктивностей и электродинамических сил в токоведущих частях электротехнических комплексов. СПб.: ФГУП «Крыловский государственный научный центр», 2020, 118 с.



**Авторы:** **Цицикян Георгий Николаевич** – доктор техн. наук, начальник сектора, заместитель начальника отдела НИО-11 филиала «ЦНИИ СЭТ» Крыловского государственного научного центра, Санкт-Петербург, Россия.



**Бобровников Петр Васильевич** – ведущий инженер отдела НИО-11 филиала «ЦНИИ СЭТ» Крыловского государственного научного центра, Санкт-Петербург, Россия.

*Elektrichestvo*, 2022, No. 3, pp. 39–42

DOI:10.24160/0013-5380-2022-3-39-42

## Inductance and Compression Forces in Double-Layer Coils

**TSITSIKYAN Georgiy N.** (*Krylov State Scientific Center, St. Petersburg, Russia*) – Head of the Sector, Deputy Head of the NIO-11 Dept., Dr. Sci. (Eng.).

**BOBROVNIKOV Petr V.** (*Krylov State Scientific Center, St. Petersburg, Russia*) – Leading Engineer of the NIO-11 Dept.

*Expressions for calculating the self-induction coefficients of two-layer and single-layer coils are considered, and related comparisons are carried out. Examples of calculating the induction coefficients for known design versions of coils are given. An expression for calculating axial compression forces in two-layer coils is presented. The axial compression forces in coils as part of three-phase load devices designed for testing generator sets of autonomous power plants have been calculated. The expressions obtained for calculating the inductances and axial compression forces in two-layer coils are quite concise and can be recommended for practical use. These expressions include only the coil design parameters: the number of turns in the layers, layer radii, winding pitches, and layer lengths. The article is illustrated with particular examples of calculating the coil inductance and compression forces.*

**Key words:** single-layer and double-layer solenoids, self-induction coefficient, axial compression forces

### REFERENCES

1. **Korovkin N.V., Vu Q.S., Yazenin R.A.** A Method for Minimization of Unbalanced Mode in Three-Phase Power Systems. – 2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conference (EConRusNW), 2016, DOI:10.1109/EConRusNW.2016.7448257.
2. **Korovkin N.V., Chechurin V.L., Hayakawa M.** Inverse Problems in Electric Circuits and Electromagnetics. Springer Science, 2007, 331 p.
3. **Knight D.W.** An introduction to the art of Solenoid Inductance and Impedance Calculation [Electron. resource], URL: <https://www.g3ynh.info/zdocs/magnetics/SolenoidZ.pdf> (Date of appeal 15.12.2021).
4. **Thompson M.T.** Inductance Calculations Techniques – Part II: Approximations and Handbook Methods, Power Control and Intelligent Motion, 1999, 11 p.
5. **Ramo S., Winnery J.R., Van Duzer T.** Fields and Waves in Communication Electronics. Hoboken: Wiley, 1994, 859 p.
6. **De Queiroz A.C.M.** Mutual Inductance and Inductance Calculations by Maxwell's Method [Electron. resource], URL: [https://www.researchgate.net/publication/266891743\\_Mutual\\_Inductance\\_and\\_Inductance\\_Calculations\\_by\\_Maxwell's\\_Method](https://www.researchgate.net/publication/266891743_Mutual_Inductance_and_Inductance_Calculations_by_Maxwell's_Method) (Date of appeal 15.12.2021).
7. **Numerical** Methods for Inductance Calculation. Robert Weaver [Electron. resource] URL: <http://electronbunker.ca/eb/CalcMethods.html> (Date of appeal 15.12.2021).
8. **Liu X., Hui S.Y.** Optimal Design of a Hybrid Winding Structure for Planar Contactless Battery Charging Platform. – IEEE Transactions on Power Electronics, 2008, vol. 23 No. 1, pp. 455–463.
9. **Lane J.E., et al.** Magnetic Field, Force and Inductance Computations for an Axially Symmetric Solenoid. NASA/TM-2013-217918, 2001.
10. **Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.** Izvestiya RAN. *Energetika – in Russ. (News of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2018, No. 8, pp. 26–31.
11. **Wheeler H.A.** Inductance Formulas for Circular and Square Coils. – Proc. of the IEEE Letters, 1982, vol.70, No.12, pp. 1449–1451.
12. **Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2019, No. 10, pp. 48–53.
13. **Kalantarov P.L., Zeytlin L.L.** *Raschyot induktivnostey. Spravochnaya kniga* (Calculation of Inductances. Reference Book). L: Energoatomizdat, 1986, 488 p.
14. **Tsitsikyan G.N., Bobrovnikov P.V., Antipov M.Yu.** *Rukovodstvo po raschyotu induktivnostey i elektrodinamicheskikh sil v tokovedushchih chastyakh elektrotekhnicheskikh kompleksov* (Manual for the calculation of inductances and electrodynamic forces in current-carrying parts of electrical complexes). SPb.: FGUP «Krylovskiy gos. nauchnyy tsentr», 2020, 118 p.

[15.12.2021]