

## О выборе численных методов интегрирования уравнений переходных процессов в электроэнергетических системах

САФАРОВ Х.С., СУЮНОВ А.А., БАБАЕВ О.Э., САЙФИЕВ С.Э.

КИЭИ, Карши, Узбекистан

*Рассмотрены алгоритмы решения системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающей электромеханические переходные процессы в электроэнергетических системах, а также вопросы обеспечения достоверности и требуемой точности результатов решения. Для моделирования динамических процессов в энергосистемах использованы классические явные методы, методы неявного численного интегрирования и совместного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений. На основе использованных методов получены разностные модели элементов электроэнергетических систем. Составление уравнений переходных процессов в электроэнергетических системах выполнено в однородном координатном базисе с применением уравнений узловых напряжений. Проведен сравнительный анализ алгоритмов, основанных на явном методе Рунге–Кутты и неявных методах Эйлера, трапеций, Эйлера с подгоночными коэффициентами. Анализ показывает, что по условиям устойчивости и точности наибольшими преимуществами обладает метод трапеций, не уступающий методу Рунге–Кутты 4-го порядка и позволяющий проводить расчеты с большим шагом интегрирования. Показана эффективность комбинированного способа, где для решения дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные процессы, используется метод Эйлера с подгонкой, а для решения уравнений электромеханического движения – метод трапеций.*

*К л ю ч е в ы е с л о в а: методы интегрирования, дифференциально-алгебраические уравнения, переходные процессы, численные методы, электроэнергетические системы*

Широкий круг задач управления сложными электроэнергетическими системами (ЭЭС) непосредственно связан с выбором рациональной формы нелинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих их переходные режимы, и численных методов решения этих уравнений. Особенностью таких систем уравнений является то, что среди  $n$  постоянных времени, соответствующих решению системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, имеются сильно отличающиеся между собой по значению. Более того, некоторые постоянные времени много меньше, чем интервал времени, для которого рассматривается решение задачи.

Решение указанных систем относится к классу жестких задач [1–3]. Этому классу принадлежат задачи расчета динамической устойчивости ЭЭС, когда время затухания свободных составляющих (сотые доли секунды) пренебрежимо мало по сравнению с временем затухания вынужденных составляющих и частотой изменения механического движения вращающихся машин (несколько секунд), а также расчет длительных переходных процессов, когда постоянные времени, связанные с трактом энергоносителя, несоизмеримы с постоянными времени изменения электрических величин.

При решении жестких задач с помощью классических явных методов численного интегрирования воз-

никает необходимость сохранения малого шага на всем интервале решения. Размер шага определяется наименьшим значением постоянной времени. Любое увеличение шага приводит к неустойчивости решения. В свою очередь использование малых шагов интегрирования на длительном интервале времени приводит к значительному увеличению времени расчета и накоплению погрешностей округления и усечений. Поэтому применяются методы упрощения уравнений, позволяющие разделить общую систему уравнений на отдельные подсистемы, имеющие соизмеримые постоянные времени.

Классическим примером такого подхода является традиционное деление единых по своей природе переходных процессов в ЭЭС на электромеханические и электромагнитные. Расчет каждого из процессов без их взаимного влияния в этом случае проводится со своим шагом, определяемым постоянными времени отдельной подсистемы уравнений. Однако и здесь размер шага ограничен и значительно меньше интервала решения. Более того, в условиях современных ЭЭС, характеризующихся наличием дальних линий электропередачи (ЛЭП) сверхвысокого напряжения, ростом единичной мощности агрегатов, ухудшением показателей устойчивости и т.д., раздельное рассмотрение процессов может привести не только к количественно, но и качественно неверным результатам.

Так как множество технических задач связано с жесткими дифференциальными уравнениями, большое внимание уделяется разработке эффективных методов их решения. Как правило, эти методы базируются на классических явных и неявных методах численного интегрирования. Для решения жестких и дифференциально-алгебраических уравнений обычно применяют неявные методы Рунге–Кутты [3–9].

Рассмотрим решение системы жестких дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка:

$$X' - f(X, t) = 0, \quad (1)$$

в общем случае нелинейных и удовлетворяющих начальным условиям  $X(0) = X_0$ .

Применение к (1) неявного многошагового метода [3, 4]

$$\sum_{p=1}^k \varepsilon_p X_{m-p} - \sum_{p=1}^k \beta_p f_{m-p} = 0; \quad \varepsilon_{-1} = 1 \quad (2)$$

(где  $\varepsilon_p, \beta_p$  – коэффициенты, определяемые порядком и видом используемого метода;  $X_j = X(t_j), f_j = f(X_j, t_j), t_j = t_0 + h_j, h$  – шаг интегрирования) приводит к системе  $n$  нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора  $X_{m+1}$ :

$$X_{m+1} - h\beta_{-1}f_{m+1} + X_\delta = 0, \quad (3)$$

где  $X_\delta$  – заданный на данном шаге интегрирования вектор, определяемый предысторией процесса.

Однако использование неявных методов в таком виде при расчетах переходных процессов в ЭЭС связано с определенными трудностями сведения сложной системы всей совокупности дифференциально-алгебраических уравнений к виду (1), т.е. к форме Коши.

Исходные дифференциальные уравнения элементов ЭЭС в общепринятых вращающихся координатах  $d, q, 0$  могут быть записаны в одной из форм:

для элементов, подключенных к узлам:

$$X' = AX + BV = f(X, V); \quad (4)$$

для продольных связей, ограниченных узлами 1 и 2:

$$X' = AX + B(V_1 - V_2) = f(X, V_1, V_2); \quad (5)$$

для механических движений вращающихся машин:

$$X' = f(X, V, t) = 0. \quad (6)$$

В уравнениях (4) и (5)  $A$  и  $B$  являются квадратными матрицами коэффициентов, в общем случае зависящими от параметров режима.

С целью выбора эффективных методов для расчета переходных процессов в ЭЭС проведено сопоставление алгоритмов на основе классического явного метода Рунге–Кутты 4-го порядка и неявных методов: Эйлера; трапеций; Эйлера с подгоночными коэффициентами. Для анализа рассмотрим схему ЭЭС, приведенную на рис. 1.

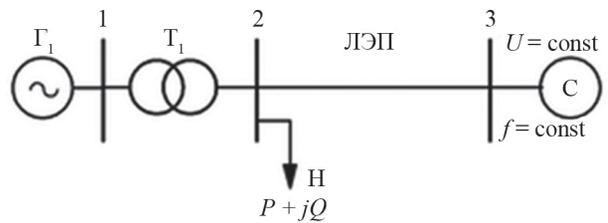


Рис. 1. Схема ЭЭС:  $\Gamma_1$  – генератор;  $T_1$  – повышающий трансформатор;  $H$  – нагрузка;  $C$  – система бесконечной мощности

Fig. 1. The EES scheme:  $\Gamma_1$  – generator;  $T_1$  – step-up transformer;  $H$  – load;  $C$  – infinite power system

Исходная математическая модель синхронного генератора (СГ) в координатных осях ротора записана в форме уравнений Лебедева–Жданова [2], полученных упрощением уравнений Парка–Горева:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \rho \Delta \psi_d - \Delta \psi_q - \psi_{q0} \Delta S + r \Delta i_d &= U \cos \delta_0 \Delta \delta; \\ \Delta \psi_d - \frac{1}{\omega_0} \Delta \psi_q + \psi_{d0} \Delta S + r \Delta i_q &= -U \sin \delta_0 \Delta \delta; \\ \frac{1}{\omega_0} \rho \psi_f + r_f \Delta i_f = 0; \quad x_{ad} \Delta i_f - x \Delta i_d &= \Delta \psi_d; \\ -x_q \Delta i_q = \Delta \psi_q; \quad x_f \Delta i_f - x_{ad} \Delta i_d &= \Delta \psi_f; \\ T_J \rho \Delta S - \Delta i_q \psi_{d0} - i_{q0} \Delta \psi_d + \psi_{q0} \Delta i_d + i_{d0} \Delta \psi_q + D \Delta S &= 0, \end{aligned} \right\} (7)$$

где  $D = D' + K$ ;  $D'$  – демпферный коэффициент;  $K$  – коэффициент, учитывающий реальную зависимость момента на валу от скольжения при малых отклонениях.

Для решения поставленной задачи необходимо исследовать свойства характеристического определителя, составленного из коэффициентов системы (7). При этом целесообразно исключить ряд переменных из исходных уравнений (7) и оставить лишь часть из них, определяющих характер движения ( $\Delta \delta, \Delta \psi_f, \Delta \psi_d, \Delta \psi_q$ ). В результате получается система:

$$\left. \begin{aligned} \left( -\psi_{q0} \frac{1}{\omega_0} \rho - U \cos \delta_0 \right) \Delta \delta + \frac{r x_{ad}}{x'_d x_f} \Delta \psi_f + \\ + \left( -\frac{1}{\omega_0} \rho - \frac{r}{x'_d} \right) \Delta \psi_d - \Delta \psi_q = 0; \\ \left( \psi_{d0} \frac{1}{\omega_0} \rho - U \sin \delta_0 \right) \Delta \delta + 0 \Delta \psi_f + \\ + \Delta \psi_d + \left( -\frac{1}{\omega_0} \rho - \frac{r}{x_q} \right) \Delta \psi_q = 0; \\ \left( \frac{T_J}{\omega_0} \rho^2 + \frac{D}{\omega_0} \rho \right) \Delta \delta + \psi_{q0} \frac{x_{ad}}{x'_d x_f} \Delta \psi_f - \\ - \left( i_{q0} + \frac{\psi_{q0}}{x'_d} \right) \Delta \psi_d + \left( \frac{\psi_{q0}}{x_d} + i_{d0} \right) \Delta \psi_q = 0; \\ 0 \cdot \Delta \delta + (T'_d \rho + 1) \Delta \psi_f - \frac{x_{ad}}{x_d} \Delta \psi_d + 0 \Delta \psi_q = 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Здесь используются общепринятые обозначения:

$$\begin{aligned} x'_d &= x_d - \frac{x_{ad}^2}{x_f}; \quad T_{d0} = \frac{1}{\omega_0} \frac{x_f}{r_f}; \\ T'_d &= T_{d0} \frac{x'_d}{x_d}; \quad T_J = \frac{T_{J*}}{\omega_0}; \quad D = \frac{D_*}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основе проведенных исследований показана возможность использования упрощенных моделей СГ и получения расчлененных систем уравнений для решения задач анализа устойчивости режимов и численного моделирования переходных процессов в ЭЭС. Следовательно, дифференциальные уравнения Парка–Горева при наличии демпферных моментов на валу СГ или при наличии автоматического регулирования возбуждения (АРВ) могут быть заменены с малыми количественными погрешностями и без качественных ошибок следующими алгебраическими уравнениями:

$$\begin{aligned} U_d &= -\psi_q \omega_0; \\ U_q &= \psi_d \omega_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Основанные на (10) уравнения электромагнитных переходных процессов, которые применяются в обычных проектных и эксплуатационных расчетах устойчивости, при  $r = 0$  имеют вид:

$$U_q = E'_q - x'_d i_d, \quad (11)$$

где  $x'_d = x_d - \frac{x_{ad}^2}{x_f}$  – переходное реактивное сопротивление СГ;  $E'_q = \psi_f \frac{x_{ad}}{x_f}$  – ЭДС за переходным реактивным сопротивлением СГ.

Тогда

$$E_q = E'_q + (x_d - x'_d) i_d. \quad (12)$$

На основе (10) можно получить:

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T_{d0}} (E_{qe} - E'_q - (x_d - x'_d) i_d), \quad (13)$$

где  $E_q = \psi_f = x_{ad} i_f$  – ЭДС холостого хода;  $E_{qe} = x_{ad} i_{f0}$  – стационарная ЭДС холостого хода;  $T_{d0} = x_f / r_f$  – постоянная времени обмотки возбуждения при разомкнутой обмотке статора.

Из (12) и (13) получается:

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T_{d0}} (E_{qe} - E'_q - (x_d - x'_d) i_d). \quad (14)$$

При учете переходных процессов в демпферных обмотках, также расположенных на роторе, вводят в рассмотрение сверхпереходную ЭДС ( $\dot{E}'' = E_d'' + jE_q''$ ) и сверхпереходные реактивные сопротивления по продольной и поперечной осям ( $x_d''$  и  $x_q''$ ). Тогда сверхпереходный процесс в СГ по продольной оси по аналогии с (7) записывается в виде:

$$\frac{dE_q''}{dt} = \frac{1}{T_{d0}''} (E_q' - E_q'' - (x_d' - x_d'') i_d). \quad (15)$$

Поскольку эффект демпферных обмоток сказывается и по поперечной оси, то сверхпереходные процессы в СГ имеют место и по поперечной оси:

$$\frac{dE_d''}{dt} = \frac{1}{T_{q0}''} ((x_q' - x_q'') i_q - E_q''). \quad (16)$$

Окончательно упрощенная система уравнений электромагнитных переходных процессов в СГ:

$$\left. \begin{aligned} T_{d0} dE_q' / dt &= E_{qe} - E_q' - (x_d - x'_d) i_d; \\ T_{q0} dE_d'' / dt &= -E_d'' + (x_q - x_q'') i_q; \\ T_{d0}'' dE_q'' / dt &= E_q' - E_q'' - (x_d' - x_d'') i_d. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Уравнения движения ротора [2, 11]:

$$\left. \begin{aligned} T_J \frac{dS}{dt} &= M_t - \frac{P_{el}}{P_{nom}} - DS - \frac{\Delta E}{P_{nom}}; \\ \frac{d\delta}{dt} &= \omega S. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

АРВ и автоматическое регулирование скорости (АРС) учтены двухзвенной моделью [2, 10].

Система дифференциальных уравнений, описывающая переходные процессы в возбудителе и АРВ [2, 10]:

$$\left. \begin{aligned} T_e dE_{qe} / dt &= U_p + E_{qe(0)} - E_{qe}; \\ E_{q\min} &\leq E_{qe} \leq E_{q\max}; \\ T_p dU_p / dt &= U_{BX} - U_p; \\ U_{p,\min} &\leq U_p \leq U_{p,\max}; \\ U_{BX} &= U_{BX0} - K_U (U_R - U_{R(0)}) + \\ &+ K'_U \frac{dU}{dt} + K'_S S + K'_S \frac{dS}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $E_{qe}$  – напряжение возбудителя (синхронная ЭДС статора в установившемся режиме при напряжении возбудителя  $U_f$ );  $E_{qe(0)}$  – уставка возбудителя;  $U_p$  – напряжение возбуждения возбудителя (напряжение на выходе регулятора);  $U_{BX}$  – напряжение на входе регулятора;  $U_{(0)}$  – уставка регулятора напряжения;  $T_e, T_p$  – постоянные времени возбудителя и регулятора;  $K_u, K'_u$  – коэффициенты усиления по каналам отклонения напряжения и первой производной напряжения;  $K_s, K'_s$  – коэффициенты усиления по каналам отклонения скольжения и первой производной скольжения.

Уравнения АРС:

$$\left. \begin{aligned} T_n \frac{d\mu}{dt} &= f(\rho); \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}; \\ 0, |\rho| &\leq \frac{z}{2}; \\ f(\rho) &= \rho - \text{sign}(\rho) \frac{z}{2}; |\rho| \leq \frac{z}{2}; \\ \rho &= \rho_0 - \frac{S}{\sigma} - \mu + \rho. \\ T_n \frac{d\mu}{dt} &= (1 - CH) \mu_{\Sigma} + R - \mu_n; \\ \mu_{\Sigma} &= \mu_n + CH\mu. \end{aligned} \right\} (20)$$

Среди многочисленных методов Рунге–Кутты наиболее широко используется вариант одношагового метода [11], где по четырем изменениям скорости каждой интегрируемой переменной вычисляется средневзвешенная скорость  $z_{cp}$  для определения приращения переменной  $\Delta y_{n+1}$  в пределах одного шага интегрирования  $h$ , т.е.

$$y_{n+1} = y_n + h z_{cp}. \quad (21)$$

Наиболее распространена формула Рунге–Кутты:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 \cdot 2 + K_3 \cdot 3 + K_4), \quad (22)$$

где  $K_1 = hz(t, y_n)$ ;

$$K_2 = hz\left(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right); K_3 = hz\left(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right);$$

$$K_4 = hz(t + h, y_n + K_3).$$

С помощью (21) значения  $y_{n+1}$  получают исходя из значения  $y_n$  после четырех подстановок переменных в каждое дифференциальное уравнение системы. Для сложных уравнений это может потребовать значительных затрат машинного времени на каждом шаге. При использовании в расчетах переходных процессов в ЭЭС явного метода Рунге–Кутты уравнения (17)–(20) должны быть сведены к форме Коши. Отметим, что данная процедура для сложных ЭЭС не всегда выполняется, но в настоящее время разработано множество специализированных явных методов, которые обладают большей областью устойчивости, чем классические [12, 13].

Особенности уравнений, описывающих переходные процессы в ЭЭС, позволяют предложить другой путь интегрирования, основанный на предварительном получении разностных уравнений отдельных элементов ЭЭС и последующем их объединении в единую систему алгебраических нелинейных уравнений. В соответствии с подходом, предложенным в [10, 14–16], можно записать систему дифференциальных уравнений в виде:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + By(t) = f(x, y, t). \quad (23)$$

Для  $(m+1)$ -го расчетного шага, применяя формулы неявных методов, можно представить разностное соотношение:

$$X_{m+1} = \alpha B_{m+1} + X_{\delta}, \quad (24)$$

где  $\alpha$  – коэффициенты разностных уравнений, зависящие от коэффициентов исходных уравнений и шага интегрирования;  $X_{\delta}$  – вектор-характеристика предыстории, элементы которого определяются теми же параметрами, что и  $\alpha$ , и значения переменных на предшествующем шаге.

Для указанных выше неявных методов выражения коэффициентов (22) имеют вид:

метод Эйлера:

$$\alpha = (\varepsilon + h_A)^{-1}h; X_{\delta} = (\varepsilon + h_A)^{-1}X_m;$$

метод трапеций:

$$\alpha = \left(\varepsilon - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \frac{h}{2}B;$$

$$x_{\sigma} = \left(\varepsilon - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(\varepsilon - \frac{h}{2}A\right) x_m + \left(\varepsilon - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \frac{h}{2}By_m;$$

метод Эйлера с подгоночными коэффициентами:

$$\alpha = \left(\frac{1}{h} \varepsilon \sigma(\rho) - A\right)^{-1} A;$$

$$x_{\sigma} = \left(\frac{1}{h} \varepsilon \sigma(\rho) - A\right)^{-1} \left(\frac{1}{h} \varepsilon \sigma(\rho)\right);$$

$$\sigma(\rho) = (\exp(\rho A) - \varepsilon)^{-1} (\rho A \exp(\rho A)); \rho = \frac{h}{\varepsilon},$$

где  $h$  – шаг интегрирования;  $\varepsilon$  – малый параметр для производной.

В соответствии с изложенным способом преобразуем уравнения СГ (17)–(20) для  $(m+1)$ -го расчетного шага к виду (индекс шага  $(m+1)$  опущен):

$$\begin{cases} E'_q = \alpha_{e'} E_{qe} + \alpha_{id1} I_d + E'_{q\delta}; \\ E''_q = \alpha_{E'_q} E'_q + \alpha_{id2} I_d + E''_{q\delta}; \\ E'_d = \alpha_{iq} I_q + E'_{d\delta}; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} s = \alpha_{P_s} + P_s + \alpha_{\mu} M_t + s_{\delta}; \\ \delta = \alpha_s + \delta_{\delta}; \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} U_p = \alpha_{Bx} U_{Bx} + U_{p\delta}; \\ E_{qe} = \alpha_u U_p + E_{qe\delta}; \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mu_t = \alpha_{\psi} \Psi + \mu_{t\delta}; \\ \mu_p = \alpha_{\mu} \mu_t + \mu_{p\delta}; \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} U_d = E_d'' - X_q'' I_d; \\ U_q = E_q'' + X_d'' I_d. \end{cases} \quad (29)$$

Уравнения состояния электрической сети формируются на основе первого закона Кирхгофа [2, 17] и в синхронно вращающихся осях имеют вид:

$$\mathbf{YU} = \mathbf{I}, \quad (30)$$

где  $\mathbf{Y}$  – квадратная матрица собственных и взаимных узловых проводимостей порядка  $N$  на  $N$  ( $N$  – число узлов в схеме);  $\mathbf{U}$  – матрица-столбец узловых напряжений;  $\mathbf{I}$  – матрица-столбец узловых токов.

Применение разностного подхода к решению жестких дифференциальных уравнений сводит задачу расчета переходных процессов во времени к формированию системы линейных и нелинейных алгебраических уравнений и совместному их решению на каждом временном шаге численного интегрирования.

Для совместного решения на временном шаге токи от генераторных узлов могут быть представлены в виде:

$$I_{\Gamma} = \gamma U_{\Gamma} - I_{\delta\delta}. \quad (31)$$

Коэффициенты  $\gamma$  и вектор предыстории  $I_{\delta\delta}$  находятся из системы (25–29) последовательным исключением внутренних переменных СГ:

$$\begin{cases} I_d = \gamma_1 U_q + I_{d\delta}; \\ I_q = \gamma_2 U_d + I_{q\delta}. \end{cases} \quad (32)$$

Для коэффициентов уравнений (32) можно записать:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\alpha_d - x_d''}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{\alpha_q - x_q''}; \quad I_{d\delta} = -\gamma_1 E_{1q\delta};$$

$$I_{q\delta} = -\gamma_2 E_{d\delta}.$$

Введем преобразование перехода  $\Pi$  между координатами  $i$ -го СГ и синхронно вращающимися координатами:

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} \cos(\delta_i) \sin(\delta_i) \\ \sin(\delta_i) - \cos(\delta_i) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где  $\delta_i$  – угол между осью ротора и синхронно вращающимися осями.

Узловые токи от генераторов в координатах сети можно представить в виде:

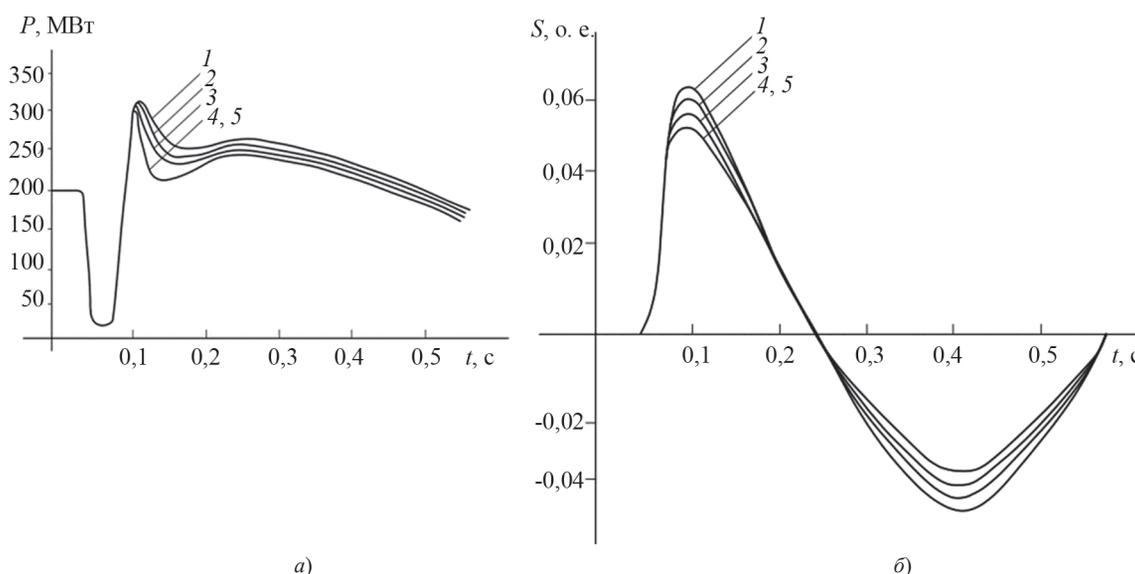
$$I = \gamma' U - I_{\delta}, \quad (34)$$

где  $\gamma'$  – квазидиагональная квадратная матрица из (33) с учетом  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \gamma' &= \Pi \gamma^{-1} \Pi^{-1}; \\ I_{\delta} &= \Pi \gamma^{-1} U_{\delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача моделирования переходных процессов в ЭЭС сводится к определению узловых напряжений на каждом шаге численного интегрирования (34). Проведенный анализ показал, что наиболее эффективен для этих целей итерационный метод Ньютона–Рафсона.

Для исследования численных методов были разработаны программы расчета переходных процессов в ЭЭС при различных возмущениях (наброс мощности на валу турбины, трехфазные КЗ, отключение и включение ЛЭП). Реализован алгоритм выбора шага численного интегрирования, значение которого корректируется на основе анализа скорости изменения медленных переменных – скольжения СГ. Критерием изменения шага является отклонение в значениях ско-



**Рис. 2.** Временные зависимости электрической мощности (а) и скольжения (б) генератора, полученные методами: 1 – Эйлера; 2 – Эйлера с подгоночными коэффициентами; 3 – комбинированным способом; 4 – трапеций; 5 – Рунге–Кутты 4-го порядка

**Fig. 2.** The time dependences of the electric power (a) and sliding (b) of the generator obtained by the methods: 1 – Euler; 2 – Euler with fitting coefficients; 3 – the combined method; 4 – trapezoids; 5 – Runge–Kutta of the 4<sup>th</sup> order

рости изменения углов СГ, полученных при итерационном решении (32), (34) и численным дифференцированием по предшествующим значениям.

Как видно из результатов, приведенных на рис. 2, а и б, метод Эйлера, являющийся простейшим неявным методом, имеет большую погрешность и не обеспечивает необходимую точность даже при уменьшении шага интегрирования. Повышение точности этого метода с помощью подгоночных коэффициентов позволяет проводить расчеты при значительно большем шаге интегрирования, однако, как показывает анализ, он ограничен точностью вычисления экспоненты в  $\sigma(p)$ .

Вместе с тем, при реализации предложенной стратегии выбора шага необходимость частого перерасчета подгоночных коэффициентов значительно снижает эффективность этого метода.

**Выводы.** В результате проведенных исследований установлено, что по условиям устойчивости и точности наибольшими преимуществами обладает метод трапеций, не уступающий методу Рунге–Кутты 4-го порядка и позволяющий проводить расчеты с большим шагом интегрирования.

При интегрировании с постоянным шагом также эффективен комбинированный способ, при котором для решения дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные процессы, используется метод Эйлера с подгонкой, а для решения уравнений электромеханического движения – метод трапеций.

Полученные результаты положены в основу моделей анализа и управления динамическими переходными процессами в сложных многомашинных ЭЭС.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979, 208 с.
2. Веников В.А. Переходные электромеханические процессы в электроэнергетических системах. М.: Высшая школа, 1985, 536 с.
3. Скворцов Л.М. Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. М.: ДМК Пресс, 2018, 230 с.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979, 312 с.
5. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Wiley, 2003, 440 p.
6. Jackiewicz Z. General linear methods for ordinary differential equations. Wiley, 2009, 504 p.
7. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994, 528 с.
8. Галанин М.П., Ходжаева С.Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов. – Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 98, 29 с. [Электрон. ресурс], URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98> (дата обращения 22.11.2021).
9. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999, 685 с.

10. Фазылов Х.Ф., Шарипов У.Б. Моделирование динамических процессов в электроэнергетических системах. – Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, № 3, с. 24–32.

11. Фалейчик Б.В. Одношаговые методы численного решения задачи Коши. Минск: БГУ, 2010, 42 с.

12. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997, 195 с.

13. Скворцов Л.М. Явные многошаговые методы с расширенными областями устойчивости. – Журнал вычислительной математики и математической физики, 2010, т. 50, № 9, с. 1539–1549.

14. Чучалин А.И. Математическое моделирование в электромеханике. Томск: Изд. ТПУ, 2000, 150 с.

15. Аристов А.В., Бурулько Л.К., Паюк Л.А. Математическое моделирование в электромеханике. Томск: Изд. ТПУ, 2005, 155 с.

16. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. М.: Высшая школа, 2001, 327 с.

17. Фазылов Х.Ф., Насыров Т.Х. Основы теории и расчета установившихся режимов электрических систем. Ташкент: Фан, 1985, 76 с.

[22.11.2021]



*Авторы: Сафаров Холиёр Сайийд Сафар угли – кандидат техн. наук, доцент кафедры «Электроэнергетика», Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан.*



*Суюнов Ахрор Акбар угли – магистрант кафедры «Электроэнергетика», Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан.*



*Бабаев Отабек Элмуродович – ассистент кафедры «Электроэнергетика», Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан.*



*Сайфиев Сардор Эркинович – ассистент кафедры «Электроэнергетика», Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан.*

# On the Choice of Methods for Numerically Integrating the Equations of Transients in Electric Power Systems

**SAFAROV Kholiyor S.** (Karshi Engineering and Economic Institute, Karshi, Uzbekistan) – Associate Professor of the Electric Power Engineering Dept., Cand. Sci. (Eng.).

**SUYUNOV Ahror A.** (Karshi Engineering and Economic Institute, Karshi, Uzbekistan) – Master's Student of the Electric Power Engineering Dept.

**BABAYEV Otabek E.** (Karshi Institute of Engineering and Economics, Karshi, Uzbekistan) – Assistant of the Electric Power Engineering Dept.

**SAYFIYEV Sardor E.** (Karshi Institute of Engineering and Economics, Karshi, Uzbekistan) – Assistant of the Electric Power Engineering Dept.

*Algorithms for solving the system of differential-algebraic equations describing electromechanical transients in electric power systems are considered along with matters concerned with ensuring the reliability and required accuracy of the solution results. Classical explicit methods, methods for implicit numerical integration and simultaneous solution of differential-algebraic systems of equations are used to model dynamic processes in power systems. On the basis of the methods used, difference models of electric power system components are obtained. The equations of transients in electric power systems are written in a homogeneous coordinate basis with the use of nodal voltage equations. A comparative analysis of algorithms based on the explicit Runge-Kutta method and implicit methods of Euler, trapezoids, Euler with fitting coefficients is carried out. The analysis results have shown that in terms of stability and accuracy, the trapezoid method has the greatest advantages, which is not inferior to the 4<sup>th</sup> order Runge-Kutta method and allows calculations with a large integration step to be carried out. The effectiveness of the combined method is shown, in which the Euler method with fitting is used to solve the differential equations describing electromagnetic processes, and the trapezoid method is used to solve the equations of electromechanical motion.*

**Key words:** integration methods, differential-algebraic equations, transients, numerical methods, electric power systems

## REFERENCES

1. **Rakitskiy Yu.V., Ustinov S.M., Chernorutskiy I.G.** *Chislennyye metody resheniya zhestkikh sistem* (Numerical Methods for Solving Rigid Systems). M.: Nauka, 1979, 208 p.
2. **Venikov V.A.** *Perekhodnye elektromekhanicheskie protsessy v elektroenergeticheskikh sistemah* (Transient Electromechanical Processes in Electric Power Systems). M.: Vysshaya shkola, 1985, 536 p.
3. **Skvortsov L.M.** *Chislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh i differentsial'no-algebraicheskikh uravneniy* (Numerical Solution of Ordinary Differential and Differential-Algebraic Equations). M.: DMK Press, 2018, 230 p.
4. **Hall J., Watt J.** *Sovremennyye chislennyye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Modern Numerical Methods for Solving Ordinary Differential Equations). M.: Mir, 1979, 312 p.
5. **Butcher J.C.** *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 2003, 440 p.
6. **Jackiewicz Z.** *General linear methods for ordinary differential equations*. Wiley, 2009, 504 p.
7. **Fedorenko R.P.** *Vvedenie v vychislitel'nyuyu fiziku* (Introduction to Computational Physics). M.: Izd-vo Mosk. fiz.-tekh. in-ta, 1994, 528 p.
8. **Galanin M.P., Hodzhaeva S.R.** *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. – in Russ. (Preprints of IPM n. a. M.V. Keldysh), 2013, No. 98, 29 p. [Electron. resource], URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98> (Date of appeal 22.11.2021).
9. **Hayrer E., Vanner G.** *Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi* (Solution of Ordinary Differential Equations. Rigid and Differential-Algebraic Problems). M.: Mir, 1999, 685 p.
10. **Fazylov H.F., Sharipov U.B.** *Izvestiya AN SSSR. Energetika i transport – in Russ. (Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Energy and Transport)*, 1985, No. 3, pp. 24–32.
11. **Faleychik B.V.** *Odnoshagovyye metody chislennogo resheniya zadachi Koshi* (One-Step Methods for Numerical Solution of the Cauchy Problem). Minsk: BGU, 2010, 42 p.
12. **Novikov E.A.** *Yavnye metody dlya zhestkikh sistem* (Explicit Methods for Rigid Systems). Novosibirsk: Nauka, 1997, 195 p.
13. **Skvortsov L.M.** *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – in Russ. (Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics)*, 2010, vol. 50, No. 9, pp. 1539–1549.
14. **Chuchalin A.I.** *Matematicheskoe modelirovanie v elektromekhanike* (Mathematical Modeling in Electromechanics). Tomsk: Izd. TPU, 2000, 150 p.
15. **Aristov A.V., Burul'ko L.K., Payuk L.A.** *Matematicheskoe modelirovanie v elektromekhanike* (Mathematical Modeling in Electromechanics). Tomsk: Izd. TPU, 2005, 155 p.
16. **Kopylov I.P.** *Matematicheskoe modelirovanie elektricheskikh mashin* (Mathematical Modeling of Electric Machines). M.: Vysshaya shkola, 2001, 327 p.
17. **Fazylov H.F., Nasyrov T.H.** *Osnovy teorii i rascheta ustanovivshisya rezhimov elektricheskikh sistem* (Fundamentals of Theory and Calculation of Steady-State Modes of Electrical Systems). Tashkent: Fan, 1985, 76 p.

[22.11.2021]