

## Распространение плоской электромагнитной волны несинусоидального периодического поля в проводящем полупространстве

ТИМОФЕЕВ В.Н., ВИНТЕР Э.Р.

*Случай падения на проводящее тело плоской электромагнитной волны, у которой векторы электрического и магнитного полей изменяются по синусоидальному закону, широко распространен в практике индукционного нагрева. В статье решена задача о распространении в проводящем полупространстве плоской электромагнитной волны несинусоидального периодического поля, создаваемой плоским индуктором. Решение получено в виде рядов Фурье в комплексной форме. Определены дифференциальные и интегральные характеристики системы «индуктор—проводящее полупространство» для различного значения постоянной времени индуктора. Сделано сравнение полученных результатов с электромагнитными характеристиками процесса распространения плоской электромагнитной волны синусоидального поля, полученные результаты проверены экспериментально.*

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** электротехника, индукционный нагрев, несинусоидальное периодическое электромагнитное поле, плоская электромагнитная волна, проводящее полупространство, ряды Фурье, комплексные коэффициенты

**Плоская электромагнитная волна.** Рассмотрим вопрос о распространении плоской электромагнитной волны в однородной электропроводящей среде с удельной проводимостью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ , простирающейся теоретически в бесконечность. Если центр прямоугольной системы координат расположен на поверхности проводящего полупространства так, что ось  $x$  совпадает с направлением вектора  $H$ , а ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $E$  и ось  $y$  направлена в глубь проводящего пространства, то

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x H_x; \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_z, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  — единичные векторы.

Такая плоская электромагнитная волна может быть создана, например, плоским индуктором, расположенным вблизи проводящего пространства (рис. 1) [2]. Индуктор представляет собой систему прямолинейных проводников неограниченной длины по координате  $z$ . Количество проводников по координате  $x$  также неограниченно.

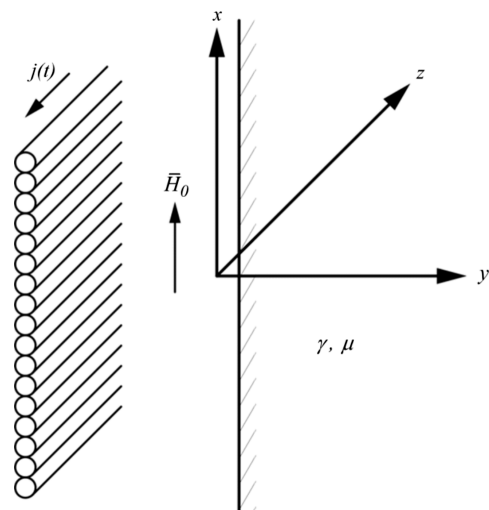
Если на длине  $l$  уложено  $W$  проводников и в каждом из них протекает ток  $i(t)$ , то напряженность магнитного поля в пространстве между индуктором и проводящим телом

$$H(t) = j(t) = \frac{Wi(t)}{l}, \quad (2)$$

где  $j(t)$  — линейная плотность тока обмотки индуктора, А/м.

**Электромагнитная волна синусоидального поля.** Задача о распространении плоской электромагнитной волны, у которой векторы электрического и магнитного полей изменяются по синусоидальному закону, рассмотрена в учебниках по ТОЭ [1] и монографиях по индукционному нагреву [2]. В случае подключения индуктора к синусоидальному источнику напряжения в проводниках возникнет синусоидальный ток

$$i(t) = I_m \sin(\omega t), \quad (3)$$



**Рис. 1.** Плоский индуктор вблизи бесконечного проводящего тела

который создаст плоскую электромагнитную волну; мгновенные значения напряженностей будут также изменяться по синусоидальному закону [1, 2]:

$$H_x(y,t) = H_m e^{-\frac{y}{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta}\right); \quad (4)$$

$$E_z(y,t) = \frac{\sqrt{2}}{\gamma\delta} H_m e^{-\frac{y}{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (5)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \quad (6)$$

– глубина проникновения электромагнитного поля в проводящее пространство, м;  $\omega$  – угловая частота,  $\text{с}^{-1}$ ;  $T$  – период колебаний, с;  $H_m = J_m = WI_m / l$ .

Среднее за период значение вектора Пойнтинга определяет поток активной энергии на глубине  $y$  проводящего пространства:

$$\Pi_{ay}(y) \frac{1}{T} \int_0^T E_z(y,t) H_x(y,t) dt = \frac{J_m^2}{2\gamma\delta} e^{-\frac{y}{\delta}}. \quad (8)$$

Значение потока активной энергии на поверхности проводящего полупространства

$$\Pi_{ay}(0) = \frac{J_m^2}{2\gamma\delta}. \quad (10)$$

Поток активной энергии на глубине  $\delta$

$$\Pi_{ay}(\delta) = \frac{J_m^2}{2\gamma\delta} e^{-2} = 0,135 \frac{J_m^2}{2\gamma\delta}. \quad (11)$$

Таким образом, в слое толщиной, равной глубине проникновения синусоидальной электромагнитной волны, выделяется 86,5% активной энергии.

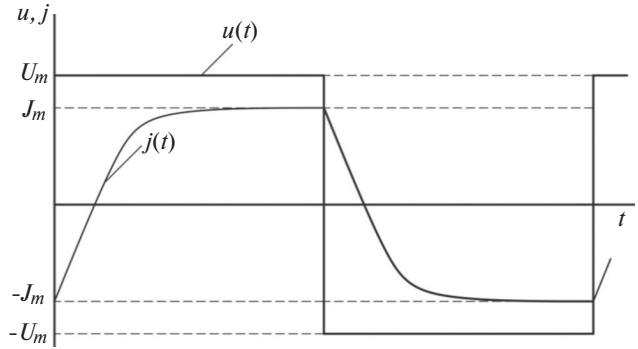
**Электромагнитная волна несинусоидального периодического поля.** Рассмотрим случай проникновения несинусоидальной электромагнитной волны в проводящую среду. Допустим, что обмотка индуктора имеет активное сопротивление  $R$  (Ом) и индуктивность  $L$  (Гн) и подключена к источнику напряжения прямоугольной формы (рис. 2). Линейная плотность тока индуктора будет изменяться по закону:

$$j(t) = \begin{cases} J_m - 2J_m e^{-t/\tau}, & 0 \leq t \leq T/2; \\ -J_m + 2J_m e^{-(t/\tau + T/2)}, & T/2 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (12)$$

где постоянная времени индуктора

$$\tau = L / R. \quad (13)$$

Выражение (12) получено из условия подключения и отключения  $RL$ -цепи к источнику постоянно-го напряжения с учетом закона коммутации [3].



**Рис. 2.** График мгновенных значений напряжения и плотности тока

Напряженность магнитного поля в области проводящего полупространства будет удовлетворять дифференциальному уравнению (индекс  $x$  в дальнейшем опущен)

$$\frac{\partial^2 H(t,y)}{\partial y^2} - \mu_a \gamma \frac{\partial H(t,y)}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

и граничным условиям:

$$H(\infty,t) = 0; \quad (15)$$

$$H(0,t) = j(t). \quad (16)$$

**Решение дифференциального уравнения. Определение напряженностей магнитного и электрического полей.** Будем искать решение (14) в виде ряда Фурье в комплексной форме [4]:

$$H(y,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} H_n(y) e^{ik_n t}, \quad (17)$$

где

$$H_n(y) = \frac{1}{T} \int_0^T H_n(y,t) e^{ik_n t} dt; \quad (18)$$

$$k_n = \frac{2n\pi}{T}. \quad (19)$$

Умножив (14) на  $\frac{1}{T} e^{ik_n t}$  и проинтегрировав получившееся выражение по  $t$  от 0 до  $T$ , получим

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - \beta_n^2 H_n(y) = 0, \quad (20)$$

где

$$\beta_n = \sqrt{ik_n \mu_a \gamma} = \frac{\sqrt{n}}{\delta} (i+1) = \frac{\sqrt{2n}}{\delta} e^{i\pi/4}. \quad (21)$$

Уравнение (20) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, общее решение которого

$$H_n(y) = C_1 e^{\beta_n y} + C_2 e^{-\beta_n y}, \quad (22)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Граничные условия (15) и (16) также необходимо преобразовать в соответствии с (18):

$$H_n(0) = \Psi_n = I_{n1} + I_{n2}; \quad (23)$$

$$H_n(\infty) = 0, \quad (24)$$

где

$$I_{n1} = J_m \left[ \frac{i}{2n\pi} (e^{-in\pi} - 1) + \frac{2e^{T/2\tau}}{(T/\tau + 2in\pi)} (e^{-(T/\tau + 2in\pi)} - 1) \right]; \quad (25)$$

$$I_{n2} = -J_m \left[ \frac{i}{2n\pi} (e^{-2in\pi} - e^{-in\pi} + \frac{2e^{T/2\tau}}{(T/\tau + 2in\pi)} (e^{-(T/\tau + 2in\pi)} - e^{-(T/2\tau + 2in\pi)}) \right]. \quad (26)$$

Определив постоянные интегрирования и подставив их в (22), получим решение:

$$H(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Psi_n e^{-\beta_n y} e^{ik_n t}. \quad (27)$$

Из первого уравнения Максвелла определим напряженность электрического поля:

$$E(y, t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{dH(y, t)}{dy} = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \beta_n \Psi_n e^{-\beta_n y} e^{ik_n t}. \quad (28)$$

Применив к (27) и (28) формулу Эйлера и выделив вещественную часть, запишем выражения для мгновенных значений напряженностей магнитного и электрического полей [4]:

$$H(\hat{y}, \hat{t}) = 2J_m \sum_{n=1}^{n=\infty} |\hat{\Psi}_n| e^{-\sqrt{n}\hat{y}} \cos(\alpha_n - \sqrt{n}\hat{y} + 2n\pi\hat{t}); \quad (29)$$

$$E(\hat{y}, \hat{t}) = \frac{2J_m}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{2n} |\hat{\Psi}_n| e^{-\sqrt{n}\hat{y}} \cos(\alpha_n - \sqrt{n}\hat{y} + 2n\pi\hat{t} + \pi/4), \quad (30)$$

где  $\hat{\Psi}_n = \Psi_n / J_m$ ;  $\hat{y} = y/\delta$ ;  $\hat{t} = t/T$ ;  $|\hat{\Psi}_n|$  и  $\alpha_n$  – модуль и аргумент комплексного числа  $\hat{\Psi}_n$ .

**Вектор Пойнтинга. Выделение мощности в проводящем полупространстве.** В соответствии с (16) мгновенное значение вектора Пойнтинга на поверхности проводящего полупространства

$$P(0, t) = [E(0, t)H(0, t)] = \frac{2J_m^2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{2n} |\hat{\Psi}_n| \cos(k_n t + \alpha_n + \pi/4) \hat{j}(t). \quad (31)$$

Среднее за период значение вектора Пойнтинга на поверхности проводящего полупространства определяет активную электромагнитную мощность, поступающую в проводящее пространство через единичную поверхность:

$$P_{эм} = \frac{2J_m^2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{2n} |\hat{\Psi}_n| N_n, \quad (32)$$

где

$$N_n = \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(k_n t + \alpha_n + \pi/4) \hat{j}(t)] dt. \quad (33)$$

Выражение для определения значения потока активной мощности в полупроводящее полупространство можно получить также с помощью интегрирования выражения для плотности источников мощности по координате  $y$  от нуля до бесконечности. Плотность источников мощности определяется законом Джоуля–Ленца. С учетом равенства Парсевалю [4] запишем

$$P_{эм} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \gamma E_m^2 = \frac{2J_m^2}{\gamma\delta} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{n} |\hat{\Psi}_n|^2. \quad (34)$$

**Анализ результатов.** Для удобства анализа перейдем к относительным величинам, поделив полученные выражения для напряженностей магнитного (29) и электрического (30) полей, а также мощности (34) на их базисные значения:

$$H_6 = J_m; \quad (35)$$

$$E_6 = \frac{J_m}{\gamma\delta}; \quad (36)$$

$$P_6 = \frac{J_m^2}{2\gamma\delta}. \quad (37)$$

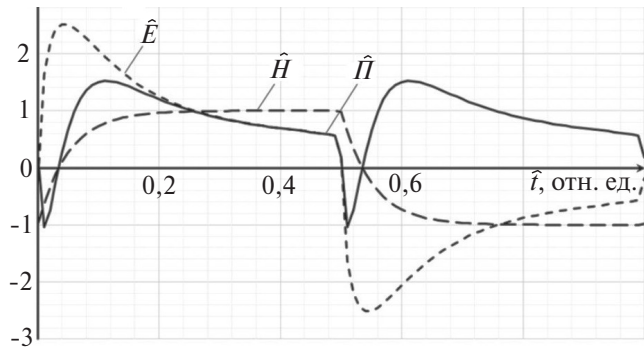
Согласно (25), (26), (29) и (30) электромагнитные характеристики зависят от постоянной времени индуктора  $\tau$ . При этом следует отметить, что при  $\tau \rightarrow 0$  в моменты нарастания и спада напряженности магнитного поля напряженность электрического поля, а следовательно и мощность, будут стремиться к бесконечности. Более того, при малых  $\hat{t}$  возникает явление Гиббса, что затрудняет расчет и анализ. Руководствуясь данными факторами, а также с учетом практических соображений исследуемый диапазон  $\hat{t}$  был выбран от 0,01 до 0,2.

На рис. 3 представлен график относительных мгновенных значений напряженностей магнитного и электрического полей и вектора Пойнтинга за период на поверхности полупространства для  $\hat{\tau}=0,05$ . Видим, что график напряженности электрического поля имеет резкие фронты в моменты нарастания и спада напряженности магнитного поля. Это объясняется тем, что напряженность электрического поля пропорциональна производной напряженности магнитного поля.

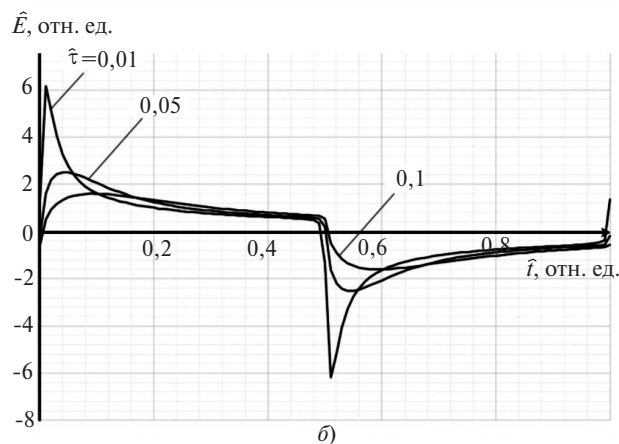
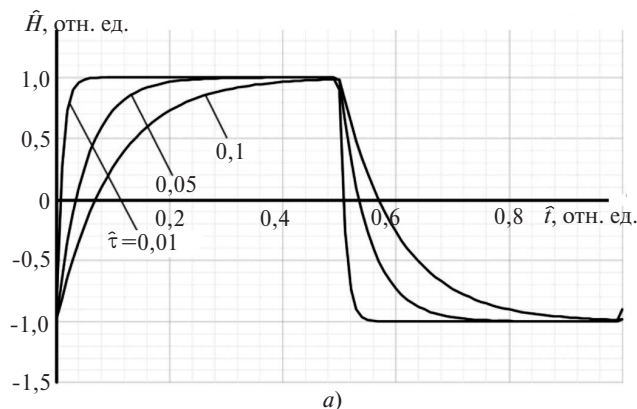
На рис. 4 представлены графики относительных мгновенных значений напряженностей магнитного и электрического полей за период на поверхности полупространства при различных значениях относительной постоянной времени  $\hat{\tau}$ . При значениях  $\hat{\tau}=0,095$  напряженность магнитного поля не достигает максимального значения  $J_m$ , так как время переходного процесса не укладывается в половину периода.

На рис. 5 представлены графики относительных мгновенных значений напряженности магнитного поля и напряженности электрического поля за период на различной глубине  $\hat{y}$  для  $\hat{\tau}=0,05$ . На глубине  $\hat{y}=1$  очень слабо выражены высшие гармоники, и форма кривых напряженностей магнитного и электрического полей практически синусоидальна. Как следует из выражений (29) и (30), такая фильтрация высших гармоник по глубине полупространства объясняется тем, что степень затухания высшей гармоники пропорциональна корню из ее номера  $\sqrt{n}$ .

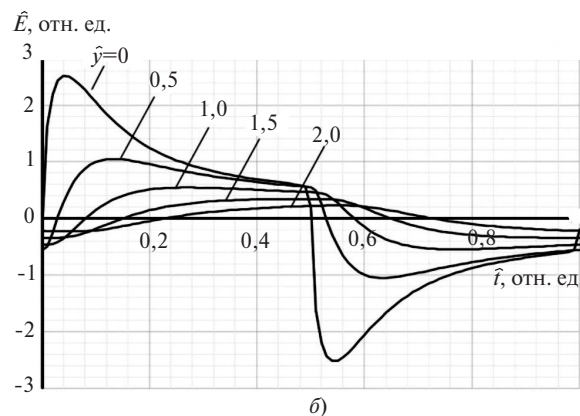
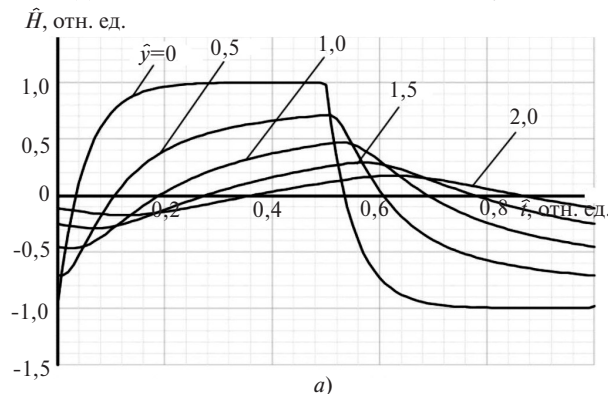
На рис. 6 представлены графики распределения относительного потока активной мощности при различных  $\hat{\tau}$ . Штриховой линии соответствует распределение для случая плоской волны синусоидального поля. Видно, что в случае несинусоидального периодического поля распределение относительного потока активной мощности по глубине имеет более резкий характер затухания. При этом для широкого диапазона постоянной времени рас-



**Рис. 3.** График относительных мгновенных значений напряженностей магнитного и электрического полей и вектора Пойнтинга за период ( $\hat{\tau}=0,05, \hat{y}=0$ )



**Рис. 4.** Графики относительных мгновенных значений напряженности магнитного поля (а) и напряженности электрического поля (б) за период для различных значений  $\hat{\tau}$  и  $\hat{y}=0$



**Рис. 5.** График относительных мгновенных значений напряженности магнитного поля (а) и напряженности электрического поля (б) за период на глубине  $\hat{y}$  для  $\hat{\tau}=0,05$

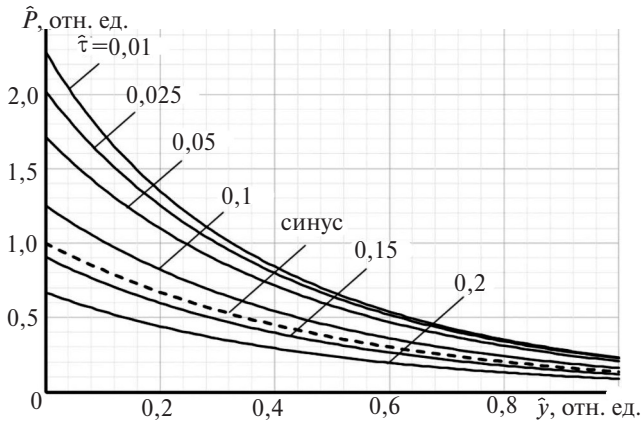


Рис. 6. Распределение относительного потока активной мощности при различных значениях  $\hat{\tau}$

пределение имеет более высокие значения потока активной мощности по глубине по сравнению с синусоидальной формой поля.

На рис. 7 показан график зависимости относительного потока активной мощности на поверхности проводящего полупространства от  $\hat{\tau}$ . Штриховой линии соответствует относительное значение потока активной мощности для случая плоской волны синусоидального поля. При несинусоидальном периодическом поле для значений  $\hat{\tau} = 0,138$  поток активной мощности на поверхности полупространства выше, чем для случая синусоидального поля. Для минимального исследуемого значения постоянной времени ( $\hat{\tau} = 0,01$ ) поток активной мощности на поверхности проводящего полупространства больше примерно в 2,3 раза по сравнению с синусоидальным полем.

На графике рис. 8 штриховой линии соответствует значение мощности, выделяющейся в слое  $\delta$  в случае плоской волны синусоидального поля (86,5% всей активной мощности). Из графика следует, что чем ближе форма магнитного поля к прямоугольной, тем больше активной мощности выделяется в слое  $\delta$  (до 90% всей активной мощности).

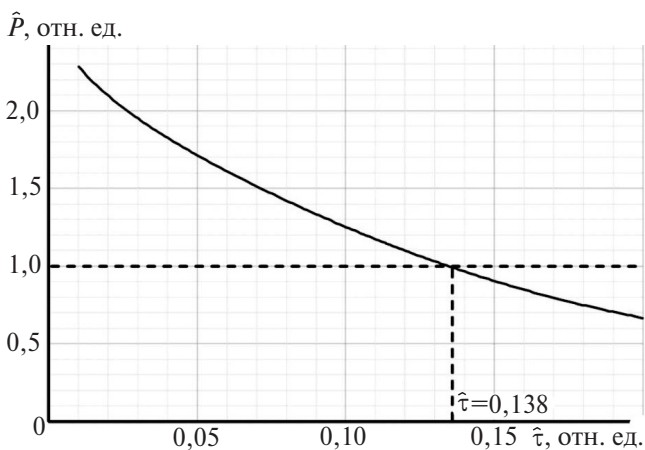


Рис. 7. График зависимости относительного потока активной мощности на поверхности полупространства от  $\hat{\tau}$

С увеличением постоянной времени индуктора значение активной мощности снижается и при значениях  $\hat{\tau} = 0,15$  перестает изменяться. При этом во всем исследуемом диапазоне  $\hat{\tau}$  в слое  $\delta$  выделяется большее количество активной мощности по сравнению с плоской волной синусоидального поля.

Стоит отметить, что такие свойства несинусоидального периодического магнитного поля могут быть полезны, например, в области индукционной поверхностной закалки, где за короткий промежуток времени требуется нагреть стальное изделие в тонком поверхностном слое, не нагревая при этом внутренних слоев изделия.

**Экспериментальные исследования.** Для проверки достоверности полученных результатов была собрана экспериментальная установка (рис. 9), состоящая из плоского индуктора 1, источника импульсного питания 2, осциллографа 3 и алюминиевой заготовки 4. Имеется отверстие в горизонтальной плоскости заготовки для размещения измерительного датчика Холла. Частота питания индуктора 50 Гц, ток 20 А. Постоянная времени индуктора составляет 0,002 с.

Для измерения динамики магнитного поля датчик размещался на уровне поверхности заготовки (точка А) и в той же плоскости в толщине заготовки (точка В). Результаты измерений выводились на дисплей осциллографа и затем сохранялись в текстовый файл.

С аналогичными параметрами был выполнен расчет с использованием полученных выражений. Результаты измерений и расчета сведены в график на рис. 10. Из-за специфики работы импульсного источника питания экспериментальная форма напряженности магнитного поля, в особенности в точке А, отличается от расчетной. Тем не менее, в обеих точках кривые имеют схожий характер. В частности, в точке В кривой напряженности магнитного поля слабо проявляются высшие гармоники и

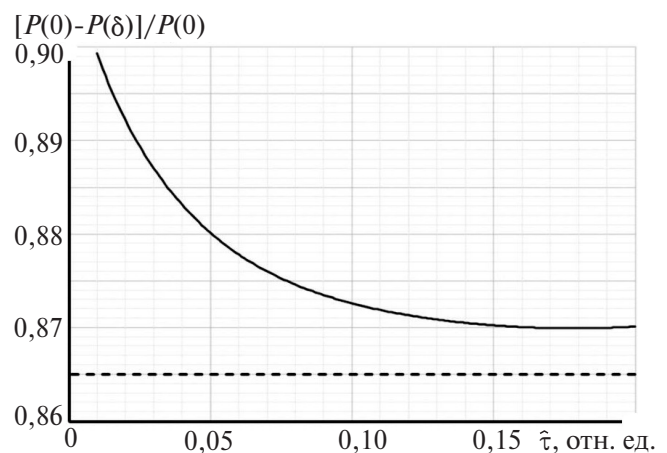


Рис. 8. График зависимости относительной активной мощности, выделяющейся в слое глубины проникновения  $\delta$ , от  $\hat{\tau}$

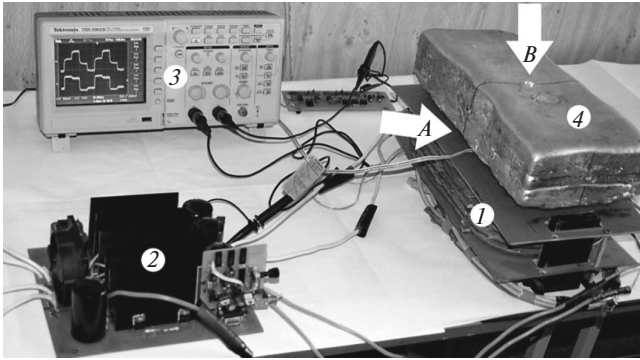


Рис. 9. Экспериментальная установка

форма кривой близка к синусоидальной, что согласуется с полученными выражениями.

**Заключение.** По сравнению с плоской электромагнитной волной синусоидального поля для несинусоидального периодического поля характерны большие значения потока активной мощности на поверхности проводящего полупространства для определённых значений постоянной времени индуктора, а также активной мощности, выделяющейся в слое глубины проникновения первой гармоники  $\delta$ , и фильтрация высших гармоник по глубине проводящего полупространства.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Красноярского края в рамках научного проекта №18-48-242013 «Исследование влияния пространственных и частотно-временных распределений электромагнитных сил в расплаве на характер протекания МГД-процессов в жидком металле».*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов, т. 2. Л.: Энергоиздат, 1981, 416 с.
2. Алиферов А.И., Луи С. Индукционный и электроконтактный нагрев металлов. Новосибирск: Изд-во Новосибирского государственного технического университета, 2011, 411 с.
3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов, т. 1. Л.: Энергоиздат, 1981, 536 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2. М.: Наука, 1974, 656 с.

[15.10.2018]

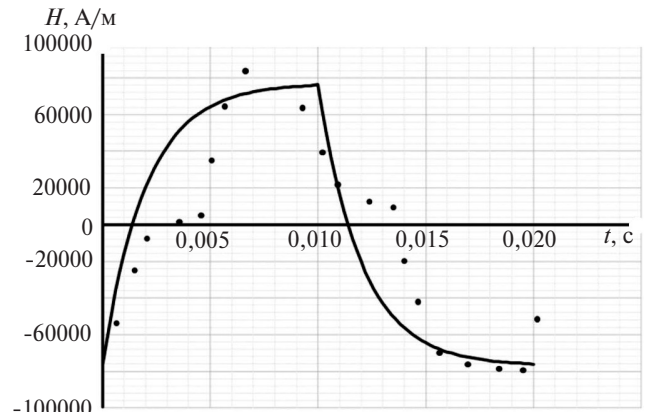
*Elektrichestvo*, 2019, No. 4, pp. 61–67

DOI:10.24160/0013-5380-2019-4-61-67

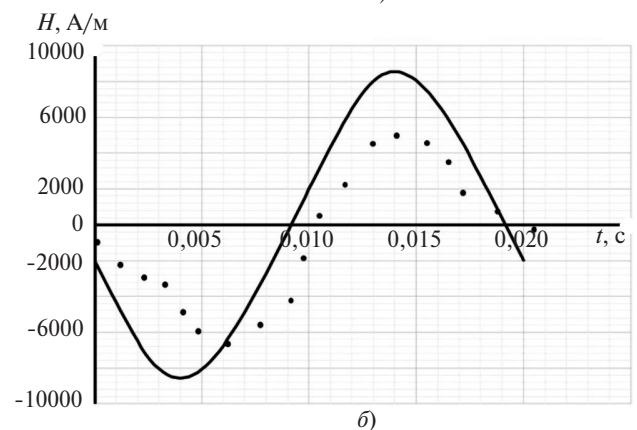
## Propagation of a Periodic Nonsinusoidal Field Plane Electromagnetic Wave in a Conducting Semispace

TIMOFEYEV Viktor N. (Siberian Federal University (SFU), Krasnoyarsk, Russia) – Head of the Dept. «Electrotechnology and Electrical Engineering», Dr. Sci. (Eng.)

VINTER Eduard R. (SFU, Krasnoyarsk, Russia) – Assistant of the Dept. «Electrotechnology and Electrical Engineering»



a)



б)

Рис. 10. Динамика напряженности магнитного поля в точках А (а) и В (б) (показаны расчетная кривая и экспериментальные точки)

*А в т о р ы : Тимофеев Виктор Николаевич окончил электротехнический факультет Красноярского политехнического института в 1974 г. Докторскую диссертацию «Электромагнитные вращатели, перемешиватели и дозаторы алюминиевых сплавов» защитил в 1994 г. в Красноярском государственном техническом университете. Заведующий кафедрой «Электротехнологии и электротехника» Сибирского федерального университета.*

*Винтер Эдуард Робертович окончил Сибирский федеральный университет в 2016 г. Ассистент кафедры «Электротехнология и электротехника» Сибирского федерального университета.*

The incidence of a plane electromagnetic wave with sinusoidally varying electric and magnetic field vectors on a conducting body is a principle that is widely used in induction heating devices. The article solves the problem about propagation in a conducting semispace of a nonsinusoidal periodic field plane electromagnetic wave produced by a flat inductor. The solution is obtained in the form of complex Fourier series. The differential and integral characteristics of the “inductor—conducting semispace” system are determined for different inductor time constant values. The obtained results are compared with the electromagnetic parameters characterizing propagation of a sinusoidal field plane electromagnetic wave. The obtained results have passed an experimental check.

**Key words:** electrical engineering, induction heating, nonsinusoidal periodic electromagnetic field, plane electromagnetic wave, conducting semispace, fourier series, complex coefficients

#### REFERENCES

1. Neyman L.R., Demirchyan K.S. *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki, t. 2* (Theoretical principles of electrical engineering, vol. 2). Leningrad, Energoizdat, 1981, 416 p.
2. Aliferov A.I., Lupi S. *Induktsionnyi i elektrokontaktnyi nagrev metallov* (Induction and electrocontact heating of metals). Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University, 2011, 411 p.
3. Neyman L.R., Demirchyan K.S. *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki, t. 1* (Theoretical principles of electrical engineering, vol. 1). Leningrad, Energoizdat, 1981, 536 p.
4. Smirnov V.I. *Kurs vysshey matematiki, t. 2* (Course of higher mathematics). Moscow, Nauka, 1974, 656 p.

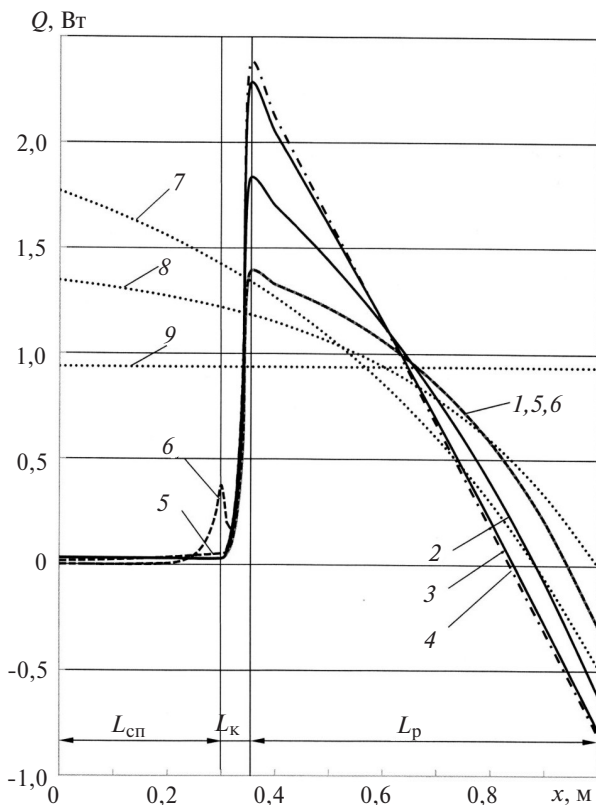
[15.10.2018]

\* \* \*

#### Поправка

В № 1, 2019 г. в статье Буянова Ю.Л. допущена досадная опечатка: вместо рис. 4 и 5 ошибочно опубликованы два рис. 4.

Приносим извинения автору и публикуем рис. 5 к его статье вместе с подрисуночной подписью.



**Рис. 5.** Изменение теплового потока вдоль координаты в токоведущих элементах тоководов, показанных на рис. 2,б (1–6) и на рис. 2,а (7–10);  $j_0 = 10 \text{ А/мм}^2$ . Расход охлаждающих газов для позиций 1–9 указан на рис. 4